COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 4 JUILLET 1859.

PRÉSIDENCE DE M. DE SENARMONT.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE. — *Sur la manière de ramener à la dynamique des corps libres, celle des corps qu'on suppose gênés par des obstacles fixes; par* **M. Poinsot.**

« **1.** Nous n'avons considéré jusqu'ici que des corps parfaitement libres. Mais en mécanique on considère souvent des corps qui n'ont d'autre liberté que celle de tourner sur quelque point ou axe fixe, ou de glisser sur un plan *inébranlable*, etc.; et l'on pourrait croire que dans cette nouvelle hypothèse la solution des problèmes demande de nouveaux principes. Mais on va voir que les précédents nous suffisent, et que notre théorie s'applique de la manière la plus directe, et même la plus *naturelle* à ces cas singuliers où l'on suppose quelque obstacle fixe qui gêne les mouvements du corps.

» **2.** Et en effet, il n'y a dans la nature aucun corps fixe. Un point qu'on appelle *fixe*, n'est au fond qu'un point invariablement attaché à quelque corps dont la masse est très-grande, et regardée comme infinie par rapport à celle du mobile que l'on considère. On peut donc toujours concevoir, à la place de ce point qu'on appelle *fixe*, un point vraiment *libre*, mais qui

serait chargé d'une masse infinie ; ou, pour s'en faire une image plus nette, un point dans lequel on supposerait qu'une quantité infinie de matière se trouve pour ainsi dire concentrée.

» De cette manière, au lieu d'un corps de figure quelconque et de masse finie M, mobile autour d'un point i qu'on suppose *fixe*, on n'aura plus à considérer qu'un système *libre* composé de ce même corps M et d'un point matériel μ qui lui est attaché en I, et dont la masse μ est infinie par rapport à M.

» 3. Il est évident que dans un tel corps ou système le centre de gravité g tombe infiniment près du point I, et que ce centre, étant chargé de la masse infinie $\mu + \mathrm{M}$, ne peut recevoir qu'un mouvement infiniment petit par l'action des forces finies qu'on y supposerait appliquées. Ce centre de gravité g reste donc immobile sous l'action de ces forces, et fait, à proprement parler, ce que nous nommons un point fixe.

» 4. Mais si la *force d'inertie* du système, c'est-à-dire la *masse* $\mathrm{M} + \mu$, est infinie, le *moment d'inertie* ne l'est point. Ce moment, autour d'un axe mené par le centre g, a une valeur finie ; et cette valeur, comme on va le voir, est exactement la même que si l'on prenait le moment d'inertie du simple corps proposé M autour du même axe. Si donc, en considérant toutes les forces appliquées au système comme transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité g, on trouve que ce centre reste immobile sous l'action de ces forces, à cause de la masse infinie $\mathrm{M} + \mu$ dont il est chargé, on voit que le corps ne restera point immobile sous l'effort des *couples* qui naissent de cette translation, mais qu'il prendra une rotation finie θ autour du centre g, à cause de la valeur finie de son moment d'inertie relatif aux axes qui passent en ce point.

» Il y a donc lieu de proposer des questions dynamiques relatives à un corps forcé de tourner sur un point fixe ; et pour les résoudre, il suffit d'appliquer les solutions trouvées pour un corps libre, mais avec cette attention de regarder le point fixe comme étant le centre de gravité du corps, de supposer à ce corps une masse infinie, et de donner à son moment d'inertie la vraie valeur finie qu'il doit avoir, et que nous allons déterminer.

» 5. Supposons d'abord, pour plus de clarté, que ce point matériel, que nous attachons en I au corps proposé M, n'ait qu'une certaine masse finie μ ; cherchons le moment d'inertie du système autour du centre de gravité g, et voyons ensuite ce que devient l'expression $(\mu + \mathrm{M})\,\mathrm{K}^2$ de ce moment quand on fait μ infinie.

» 6. Soit G le centre de gravité du simple corps M; et faisons la ligne IG $= d$. Si l'on coupe cette ligne au point g en deux parties i et $d - i$ réciproques aux masses M et μ, on aura le centre de gravité g du système; et pour les distances de ce point à I et à G,

$$i = d \frac{M}{\mu + M}, \quad d - i = d \frac{\mu}{\mu + M}.$$

Or le moment d'inertie du point massif μ autour du centre g est évidemment μi^2 : celui du corps M, relatif au même point, est composé, 1° de son moment d'inertie autour de son propre centre de gravité G, et que je désigne par MD^2; 2° du produit $M(d - i)^2$ de la masse de ce corps par le carré de la distance $(d - i)$ de son centre au point g. En ajoutant ces valeurs on aura donc, pour le moment d'inertie du système, représenté par $(\mu + M) K^2$,

$$(\mu + M) K^2 = \mu i^2 + M (d - i)^2 + MD^2,$$

d'où, en mettant pour i sa valeur précédente, on tire

$$(\mu + M) K^2 = M \left(D^2 + \frac{d^2}{1 + \frac{M}{\mu}} \right).$$

» Actuellement, supposons que la masse μ augmente depuis zéro jusqu'à l'infini, on voit que le moment d'inertie augmente depuis MD^2, qui est sa valeur la plus petite, jusqu'à $M(D^2 + d^2)$, qui est sa valeur la plus grande : de sorte qu'en faisant $\mu = \infty$, afin de passer à l'hypothèse mathématique d'un point fixe dans le corps M, on a

$$(\mu + M) K^2 = M (D^2 + d^2);$$

ce qui est précisément la même valeur que si l'on eût pris le moment d'inertie du simple corps M autour du point I.

» 7. Le moment d'inertie du système ayant donc une valeur finie, il est clair que si ce moment est représenté à la manière ordinaire par le produit $(\mu + M) K^2$, la ligne K qui représente le *bras de l'inertie* doit être regardée comme *nulle*, à cause de la masse $(\mu + M)$ égale à l'infini. Cependant il est bon de remarquer que cette ligne infiniment petite K est infiniment grande par rapport à la distance i du point I au centre de gravité g du système. Il en est de cette ligne K à l'égard de la seconde i, comme du sinus d'un arc infiniment petit à l'égard de son sinus verse. Si l'on compare, en effet, l'ex-

pression de K^2, qui est

$$K^2 = \frac{\mu M \left[d^2 + D^2 \left(1 + \frac{M}{\mu} \right) \right]}{(\mu + M)^2},$$

à celle de i^2, qui est

$$i^2 = d^2 \, \frac{M^2}{(\mu + M^2)},$$

on trouve

$$\frac{K^2}{i^2} = \frac{\mu}{M} \cdot \frac{d^2 + D^2 \left(1 + \frac{M}{\mu} \right)}{d^2},$$

d'ou résulte, en faisant $\mu = \infty$;

$$\frac{K^2}{i^2} = \infty ;$$

et par conséquent K infiniment grand par rapport à i.

» D'un autre côté il faut remarquer que la quantité $\frac{K^2}{i}$, qui en géométrie représente une ligne, ne répond point ici à une ligne infinie, mais à une certaine ligne terminée l. Car en multipliant les deux nombres de l'équation précédente par i, et mettant dans le second membre, au lieu de i, sa valeur $d \frac{M}{\mu + M}$, on trouve

$$\frac{K^2}{i} = \frac{d^2 + D^2 \left(1 + \frac{M}{\mu} \right)}{d \left(1 + \frac{M}{\mu} \right)} ;$$

d'où, en faisant $\mu = \infty$, on tire

$$\frac{K^2}{i} = \frac{d^2 + D^2}{d} = d + \frac{D^2}{d} = l,$$

ce qui est l'expression de la ligne IC qui va du point I au *centre* C *d'oscillation* du corps M autour de ce point I.

» 8. On voit par là que le même point C qui est réciproque au point I dans le simple corps M, est aussi réciproque à I dans le système composé du même corps M et du point matériel de masse infinie μ placé en I. Si donc on suppose que le système est frappé en I à la distance infiniment petite i du centre g, soit à gauche, soit à droite de ce point g, le centre spontané

de rotation se trouvera de l'autre côté, en C, à une distance finie $l = d + \frac{D^2}{d}$. Or maintenant, quelque petite que soit cette distance i du point I au centre g, on peut toujours concevoir entre ces deux points un autre point O dont la distance x au point g soit infiniment petite par rapport à i, et par conséquent telle, que l'expression $\frac{K^2}{x}$ soit infiniment grande par rapport à $\frac{K^2}{i}$; donc, puisque celle-ci répond à une ligne terminée l, l'autre $\frac{K^2}{x}$ répondra à une ligne infinie : de sorte que le centre spontané C' correspondant au centre de percussion O sera à une distance infinie du centre de gravité g. Lors donc que dans nos formules nous trouverons l'expression $\frac{K^2}{x}$, où nous aurons à faire la variable *indépendante* x égale à *zéro*, il faudra prendre $\frac{K^2}{x} = \infty$, bien que l'expression semblable $\frac{K^2}{i}$ réponde à une ligne *finie* l lorsque la variable i, *dépendante* de K, devient aussi égale à zéro.

» **9**. Ainsi il faut bien se garder de confondre en dynamique cette ligne infiniment petite K, qui représente le bras d'inertie du système, avec la ligne infiniment petite i, qui marque la distance du centre de gravité g au point massif μ attaché en I, quoique ces deux lignes deviennent également *nulles* dans notre hypothèse de $\mu = \infty$. Il faut aussi bien distinguer les vraies valeurs des expressions $\frac{K^2}{i}$ et $\frac{K^2}{x}$, dont la première, où i et K sont toutes deux variables avec μ, donne une ligne *finie* $l = d + \frac{D^2}{d}$, tandis que l'autre $\frac{K^2}{x}$, où x est indépendante de μ, donne une ligne *infinie* dans le cas de $x = 0$. Ces distinctions délicates sont aussi nécessaires en dynamique qu'en analyse; car pour peu qu'on les néglige, on s'expose à tomber dans des erreurs grossières.

» **10**. Pour en donner un exemple, supposons que notre système ayant reçu l'impulsion d'un couple donné N, on demande avec quelle force Q le corps frapperait un point fixe T qu'on viendrait à lui présenter à une distance quelconque x du centre de gravité g. Nous avons démontré ailleurs qu'on aura pour la grandeur Q de cette percussion

$$Q = N \frac{x}{K^2 + x^2},$$

et que le maximum de Q se trouve au point T qui répond à la distance $x = K$,

c'est-à-dire à l'extrémité du bras K de l'inertie du système. Or, comme cette ligne K est ici *nulle*, on pourrait conclure que le centre T de la percussion maximum se confond avec le centre de gravité g : ce qui serait en dynamique une erreur très-grande ; car il est aisé de voir qu'au point g la percussion est entièrement nulle, tandis qu'au point T, quoique infiniment proche de g, la percussion est infinie.

» Et en effet l'expression

$$Q = N \frac{x}{x^2 + K^2} = N \frac{1}{x + \frac{K^2}{x}}$$

devient pour $x = 0$

$$Q = N \frac{1}{0 + \infty} = 0,$$

comme il est évident d'ailleurs que cela doit être, puisque le système tourne réellement sur son centre g et ne peut ainsi causer aucune percussion par ce point.

» Mais en faisant $x = K$, l'expression devient

$$Q = N \frac{1}{2K};$$

laquelle, en prenant pour K sa valeur qui est ici *nulle*, devient

$$Q = N \frac{1}{0} = \infty.$$

» **11**. De même, si le corps, au lieu d'être animé par un couple N, avait reçu l'impulsion d'une simple force P passant à une distance donnée δ du centre g, auquel cas la percussion Q dont le corps serait capable à une distance quelconque x de ce même centre aurait pour expression

$$Q = P \frac{K^2 + \delta x}{K^2 + x^2},$$

on pourrait conclure que le centre T de la percussion maximum, qui se trouve à la distance

$$x = -\frac{K^2}{\delta} \pm \sqrt{K^2 + \frac{K^4}{\delta^2}},$$

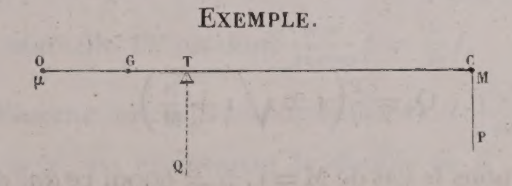
se confond ici, à cause de $K = 0$, avec le centre de gravité g : ce qui serait une erreur de doctrine toute semblable à la précédente.

» Car au point g, c'est-à-dire quand on a $x = 0$, la percussion Q est actuellement égale à la force P, tandis qu'au point T, qui répond à la valeur précédente de x, on a une percussion Q *infinie*.

» **12.** Au reste, pour se faire des idées plus nettes et pour éviter toute erreur dans les applications, il vaudra toujours mieux supposer que la masse μ n'est point infinie, mais seulement très-grande, et conserver ainsi cette lettre μ dans toutes les expressions de notre analyse. Toutes les quantités seront alors bien distinctes, et l'on pourra voir leurs vraies valeurs mathématiques dans l'hypothèse de $\mu = \infty$. Cette manière de voir, en supposant μ non pas infinie, mais seulement très-grande, est d'ailleurs plus conforme à la nature, car en réalité il n'existe pas de corps ni de point dont la masse soit infinie; cette supposition n'est pas moins imaginaire que celle d'un point fixe. Tout ce qu'on voit de réel, c'est qu'un corps, tel qu'un levier par exemple, peut très-bien s'appuyer par un de ses points contre un autre corps dont la masse est très-grande et dont le mouvement, en vertu des forces appliquées, sera très-petit et comme insensible par rapport à celui que prendra le mobile que l'on considère.

» Mais il ne sera peut-être pas inutile d'éclaircir encore ces points de doctrine par quelques applications numériques.

Exemple.



» **13.** CO, verge immatérielle chargée à ses bouts C et O de deux points massifs M et μ. Si la verge est frappée en C avec une force P, on demande la percussion Q que cette verge roide peut causer sur un point T pris à la distance $GT = x$ du centre de gravité G du système des deux masses μ et M.

» Le moment d'inertie du système autour de son centre G sera, en faisant $GO = i$, $GC = l - i$ (l étant la longueur CO),

$$(M + \mu) K^2 = \mu i^2 + M (l - i)^2,$$

K désignant le bras de l'inertie ; or on a

$$i = l . \frac{M}{M + \mu}, \quad l - i = l \frac{\mu}{M + \mu};$$

donc

$$(\mathrm{M}+\mu)\,\mathrm{K}^2 = l^2.\frac{\mu\mathrm{M}^2+\mathrm{M}\mu^2}{(\mathrm{M}+\mu)^2} = l^2\,\frac{\mu\mathrm{M}}{\mathrm{M}+\mu};$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{K}^2 = l^2.\frac{\mu\mathrm{M}}{(\mathrm{M}+\mu)^2} = i.(l-i).$$

» La percussion Q causée en T, à la distance x de G, est exprimée par

$$\mathrm{Q} = \mathrm{P}.\frac{\mathrm{K}^2 + x(l-i)}{\mathrm{K}^2 + x^2};$$

si l'on cherche la valeur de x qui répond au maximum de la percussion Q, et qu'on la désigne par x_0, on trouvera

$$x_0 = -i \pm \sqrt{il},$$

et mettant cette valeur de x dans l'expression de Q, on aura, pour la valeur maximum de cette percussion,

$$\mathrm{Q}_0 = \frac{\mathrm{P}}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{l-i}{i}}\right),$$

ou, si l'on veut,

$$\mathrm{Q}_0 = \frac{\mathrm{P}}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{\mu}{\mathrm{M}}}\right).$$

» *Exemple.* Prenons le cas de $\mathrm{M}=1$, $\mu = 9999$, ce qui donne $\frac{\mu}{\mathrm{M}} = 9999$; on aura

$$\mathrm{K}^8 = l^2.\frac{9999}{10000^2} = i(l-i),$$

$$i = l.\frac{1}{10000},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{K}}{i} = l.\frac{9999}{10000}.$$

L'abscisse x_0 du point T où se fait la plus grande percussion sera

$$x_0 = l\left(-\frac{1}{10000} \pm \frac{1}{100}\right),$$

et cette percussion maximum sera

$$Q_0 = \frac{P}{2}\left(1 + \sqrt{10000}\right) = \frac{P}{2}\cdot 101,$$

de même sens que la force P ; ou, au point T′ réciproque à T,

$$Q_0 = \frac{P}{2}\left(1 - \sqrt{10000}\right) = -\frac{P}{2}\cdot 99,$$

de sens contraire à P.

» Dans cet exemple donc où la verge OC est chargée à ses deux bouts de deux points massifs μ et M qui sont entre eux dans le rapport de 9999 à 1, et où le point M est frappé par une force P, la percussion maximum Q vaut $50\frac{1}{2}$ fois la force d'impulsion P, et au point T′, réciproque à T, elle est $49\frac{1}{2}$ fois cette même force P, mais de *sens contraire* à la première.

» Le point T de la plus grande percussion est entre le centre G et le centre C; l'autre point T′ de la percussion maximum de sens contraire à P, tombe de l'autre côté du centre G. Ces deux points T et T′ sont tous deux très-voisins du centre de gravité G : le premier T en est à une distance GT égale à $\frac{99}{10000}$ de OC; l'autre T′ à une distance GT′ égale à $\frac{101}{10000}$ de la même ligne OC : leur distance mutuelle TT′ est donc $\frac{200}{10000}\,l = \frac{1}{50}\,l$.

» Le bras K de l'inertie du corps autour de G est $= l.\frac{\sqrt{9999}}{10000} = \frac{1}{100}\,l$ à peu près; et $TT' = x_0 + x'_0$ est exactement le double de K′, K′ étant le bras de l'inertie autour de O; car on a

$$K'^2 = K^2 + i^2 = il - i^2 + i^2 = il = l^2.\frac{1}{10000},$$

$$K' = l.\frac{1}{100} \quad \text{et} \quad 2K' = l.\frac{1}{50};$$

donc

$$TT' = 2K'.$$

» **14.** Si dans les formules de l'article **13** on veut faire μ infinie par rapport à M, afin de passer à l'hypothèse mathématique d'un point fixe O, pris dans la verge roide OC chargée en C du point massif M, on trouvera pour le moment d'inertie $(M + \mu)K'^2$ autour du point fixe O,

$$(M + \mu)K'^2 = Ml^2,$$

le même que donnerait le simple corps M autour du point O. Mais le bras K′ deviendra

$$K' = \sqrt{\frac{Ml^2}{M+\mu}} = 0\,;$$

cependant $\frac{K'^2}{i}$ deviendra une ligne finie égale à l; d'où l'on voit que K′ qui est infiniment petit, est infiniment grand par rapport à i; ainsi le bras d'inertie K′ est à l'égard de i, distance de μ au centre de gravité G du système, ce qu'un sinus d'arc infiniment petit est à l'égard du sinus verse.

» Si, μ restant un point massif, G est le centre de gravité d'un corps de figure quelconque de masse M, on a pour le moment d'inertie du système de μ et de M, autour du centre de gravité G,

$$(M+\mu)K^2 = M\left(D^2 + l^2\frac{1}{1+\frac{M}{\mu}}\right),$$

D étant le bras de l'inertie du simple corps M autour de son centre de gravité; d'où, en faisant μ infinie pour passer à l'hypothèse d'un point fixe en μ, on tire le moment d'inertie

$$(M+\mu)K^2 = M(D^2 + l^2),$$

le même que si le point μ était anéanti.

» Quoi qu'il en soit, il résulte de tout ce qu'on vient de dire que dans le mouvement d'un corps M autour d'un point fixe O, le centre de percussion ordinaire, n'est, pas plus que dans un corps libre, le centre de la plus grande percussion de ce corps contre un point fixe T qu'on viendrait opposer tout à coup à son mouvement actuel. Ce véritable centre T est infiniment près du point fixe Q, et cette percussion est infinie.

» **15.** Nous avons trouvé dans un précédent travail que le point par lequel un corps M pourrait communiquer à un point libre de masse m en repos la plus grande vitesse possible, n'est pas le centre de percussion *maximum* du même corps contre un point qu'on supposerait fixe; que ce nouveau centre de plus grande vitesse communiquée à un point libre m, se trouve à une distance λ du centre spontané O du corps choquant M, qui est exprimée par

$$\lambda = \pm\sqrt{a^2 + K^2\left(1+\frac{M}{m}\right)},$$

K étant le bras de l'inertie du corps M autour de son centre de gravité G, et a la distance de ce même centre G au centre spontané de la rotation. Si, au lieu du simple corps M, nous considérons le système $M+\mu$ composé de M et d'un point massif μ placé en I à la distance a' du centre G de ce système $M+\mu$, il faudra changer dans l'expression précédente de μ, M en $M+\mu$, a en a' et K en K'^2, K' étant le bras de l'inertie du système autour du centre G; ainsi on aura

$$\lambda^2 = a'^2 + K'^2\left(1 + \frac{M+\mu}{m}\right)$$

ou

$$\lambda^2 = a'^2 + K'^2 + \frac{(M+\mu)}{m}K'^2.$$

Maintenant si l'on suppose $\mu = \infty$, afin de passer à l'hypothèse d'un point fixe I autour duquel tourne le simple corps M, on aura $a' = 0$, $K' = 0$; mais $(M+\mu)K'^2$ ne deviendra pas zéro, et sa vraie valeur sera

$$(M+\mu)K'^2 = M(K^2 + d^2),$$

d étant la distance du centre G au point I, et K le bras de l'inertie du simple corps M autour de son centre G; $M(K^2+d^2)$ sera donc le moment d'inertie du corps autour du point fixe I.

» Ainsi quand un corps M tourne autour d'un point fixe I, le centre V de plus grande vitesse communiquée à un point libre m se trouve à une distance

$$IV = \sqrt{\frac{M(K^2+d^2)}{m}};$$

ce point V dépend, comme on voit, du rapport qu'il y a entre la masse M du corps choquant et la masse m du corps choqué; la distance IV est proportionnelle à la racine carrée du rapport $\frac{M}{m}$.

» Si $m = M$, IV devient simplement $\sqrt{K^2+d^2}$; c'est le bras de l'inertie du corps autour du point fixe.

» Si m devenait infinie et représentait ainsi un point fixe, IV deviendrait nulle, et ce serait alors le centre de percussion *maximum*, ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on a déjà établi.

» Si m était très-petite par rapport à M, la distance IV serait très-grande. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie des équations modulaires;* *par* **M. Hermite.** (Suite.)

« L'étude des fonctions $F_1(x, \Delta)$ et $F_2(x, \Delta)$, qui se présentent avec les mêmes propriétés, conduit à des résultats analogues à ceux que nous venons d'indiquer relativement à $\mathcal{F}_1(x, \Delta)$, tandis que $\mathcal{F}_2(x, \Delta)$, qui correspond à l'ordre improprement primitif des classes de déterminant $-\Delta$, dans le cas de $\Delta \equiv -1 \bmod 8$, semble devoir rester entièrement en dehors de cette analogie. Réservant pour un autre moment l'étude de cette fonction, je me bornerai maintenant aux résultats qui concernent les deux premières, et dont voici la principale propriété :

» Si l'on excepte les cas de $\Delta = 1$, $\Delta = 2$, l'ensemble de leurs racines peut être décomposé en groupes, qui chacun en comprennent quatre que l'on peut représenter ainsi :

$$\rho, \quad \left(\frac{1-\sqrt{\rho}}{1+\sqrt{\rho}}\right)^2, \quad \frac{1}{\rho}, \quad \left(\frac{1+\sqrt{\rho}}{1-\sqrt{\rho}}\right)^2.$$

Il s'ensuit qu'elles sont décomposables en facteurs du quatrième degré de cette forme :

$$(x+1)^4 + \alpha x(x-1)^2,$$

et qu'on peut ramener les deux équations $F_1(x, \Delta) = 0$, $F_2(x, \Delta) = 0$ à un degré quatre fois moindre, moitié par conséquent du nombre des classes de déterminant $-\Delta$, par la substitution $y = \frac{(x+1)^4}{x(x-1)^2}$.

» Les considérations arithmétiques qui conduisent à ce résultat montrent en même temps que le nombre des classes de déterminant $-\Delta$ est toujours pair lorsque $\Delta \equiv 1$ ou $\equiv 2 \bmod 4$, sauf les exceptions ci-dessus mentionnées de $\Delta = 1$, $\Delta = 2$. S'il se réduit à deux, α sera un nombre entier, qu'on pourra calculer comme il suit :

$$1^\circ. \quad \Delta \equiv 1 \quad \bmod 4.$$

» Les deux classes sont alors représentées par les formes réduites :

$$(1, 0, \Delta), \quad \left(2, 1, \frac{\Delta+1}{2}\right),$$

et la première donne l'équation

$$(1,\ 0,\ \Delta)_2 = 0,$$

d'où

$$\omega = 1 + i\sqrt{\Delta}.$$

» Il suffit donc d'exprimer que $(x+1)^4 + \alpha x(x-1)^2 = 0$ a lieu pour $x = \varphi^8(\omega)$, ce qui donne, en faisant $q = e^{i\pi\omega}$,

$$16\alpha = -\left(\frac{1}{q} + 104 + 4372q + 96256q^2 + \ldots\right),$$

et par suite comme, d'après la valeur de ω, $q = -e^{-\pi\sqrt{\Delta}}$,

$$16\alpha = e^{\pi\sqrt{\Delta}} - 104 + \frac{4372}{e^{\pi\sqrt{\Delta}}} - \frac{96256}{e^{2\pi\sqrt{\Delta}}} + \ldots.$$

Or depuis $\Delta = 9$, on peut se borner aux deux premiers termes de cette suite, et si l'on désigne par a le nombre entier immédiatement supérieur à $e^{\pi\sqrt{\Delta}}$, on aura exactement

$$\alpha = \frac{a-104}{16}.$$

» Les déterminants, qui ne donnent ainsi que deux classes dans l'ordre primitif et auxquels on pourra appliquer cette formule, sont

$$-5,\ -9,\ -13,\ -25,\ -37,\ \text{etc.}$$

» Par la méthode algébrique indiquée dans un précédent article (voyez *Comptes rendus*, t. XLVIII, p. 1097), on obtient les résultats suivants que l'emploi de la formule pourra servir à vérifier, savoir :

$$(x+1)^4 + 2^6 x(x-1)^2 = 0 \qquad \Delta = 5,$$
$$(x+1)^4 + 3.2^8 x(x-1)^2 = 0 \qquad \Delta = 9,$$
$$(x+1)^4 + 3^4.2^6 x(x-1)^2 = 0 \qquad \Delta = 13,$$
$$(x+1)^4 + 5.3^4.2^7 x(x-1)^2 = 0 \qquad \Delta = 25.$$

2°. $\Delta \equiv 2 \mod 4$.

» Les deux classes, qu'on suppose seules exister, sont représentées par

les formes

$$(1,\ 0,\ \Delta),\ \left(2,\ 0,\ \frac{1}{2}\Delta\right);$$

à la première correspond la valeur

$$\omega = i\sqrt{\Delta},$$

d'où

$$q = e^{-\sqrt{\Delta}},$$

et, tout à fait comme précédemment, on est conduit à l'expression

$$16\alpha = -\left(e^{\pi\sqrt{\Delta}} + 104 + \frac{4372}{e^{\pi\sqrt{\Delta}}} + \frac{96256}{e^{2\pi\sqrt{\Delta}}} + \ldots\right).$$

» En désignant encore par a le nombre entier immédiatement supérieur à $e^{\pi\sqrt{\Delta}}$, on aura la formule

$$\alpha = -\frac{a+104}{16},$$

qui sera applicable à partir de $\Delta = 10$.

» Les déterminants qui ne fournissent que deux classes dans l'ordre primitif, seront

$$-6,\quad -10,\quad -18,\quad -22,\quad -58,\quad -82,\ \text{etc.},$$

si on les joint aux précédents, ainsi qu'à ceux dont il a déjà été question à propos du polynôme $\mathcal{F}_1(x, \Delta)$, on aura autant de cas dans lesquels la quantité $e^{\pi\sqrt{\Delta}}$ approche d'autant plus d'un nombre entier que Δ sera plus grand; ainsi, par exemple, dans la quantité $e^{\pi\sqrt{82}}$ la partie décimale commence par neuf chiffres égaux à 9.

» Voici les équations auxquelles on parvient, comme on va le voir, par la méthode algébrique générale, savoir :

$$\begin{array}{rl} x^2 - 6x + 1 = 0 & \Delta = 2, \\ (x+1)^4 - 3^2.\ 2^4.\ x(x-1)^2 = 0 & \Delta = 6, \\ (x+1)^4 - 5^2.\ 2^2.\ x(x-1)^2 = 0 & \Delta = 10, \\ (x+1)^4 - 7^2.\ 2^4.\ x(x-1)^2 = 0 & \Delta = 18, \\ (x+1)^4 - 11^2.\ 3^4.\ 2^4\, x(x-1)^2 = 0 & \Delta = 22. \end{array}$$

On remarquera que le coefficient numérique $-\alpha$ est toujours un carré divisible par Δ, sauf le cas du déterminant -18, le seul qui, n'étant pas le double d'un nombre premier, ne renferme cependant que deux classes dans l'ordre primitif. Mais lorsqu'on a $\Delta \equiv 1 \bmod 4$, c'est la quantité $\alpha + 16$ qui contient Δ en facteur lorsqu'il est un nombre premier, et le quotient $\frac{\alpha + 16}{\Delta}$ se présente toujours comme égal à un carré. La même circonstance se remarque dans les équations

$$(x^2 - x + 1)^3 + \alpha(x^2 - x)^2 = 0;$$

à l'égard de la quantité $4\alpha + 27$ (*), qui est également le produit de Δ par un carré, lorsque Δ est un nombre premier.

» X. Le calcul des polynômes $F_1(x, \Delta)$ et $F_2(x, \Delta)$ repose, comme il a été dit, sur la formation de l'équation qui résulte du système

$$\Theta(v, u) = 0, \quad u^4 = \frac{v^4 - 1}{v^4 + 1},$$

ou

$$\Theta(v, u) = 0, \quad u^4 = -\frac{v^4 - 1}{v^4 + 1},$$

en faisant $u^8 = x$ (**). Les quantités Δ, qui répondent dans les deux cas aux valeurs de n pour lesquelles on possède l'équation modulaire, sont indiquées dans ce tableau :

(*) L'identité

$$4[(x^2 - x + 1)^3 + \alpha(x^2 - x)^2] = (2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^2 + (4\alpha + 27)(x^2 - x)^2$$

en montre l'origine, et donne en même temps une résolution facile des équations $\mathcal{F}_1(x, \Delta) = 0$, lorsqu'elles sont du 6e degré.

(**) Le système $\Theta(v, u) = 0$, $v = \frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{u}$, $u^8 = x$, donne aussi une équation en x dont le premier membre est le produit de facteurs qui sont tous de la forme $F_1(x, \Delta)$ ou $F_2(x, \Delta)$. Le premier cas a lieu lorsque le nombre n, qui désigne l'ordre de la transformation à laquelle se rapporte l'équation modulaire, est $\equiv 1 \bmod 4$, et alors $\Delta = n - \rho^2$, ρ étant impair. Si $n \equiv -1 \bmod 4$, ce sont les facteurs $F_2(x, \Delta)$ qui se présentent, Δ étant encore $n - \rho^2$, mais ρ devant être supposé pair.

n	$\Delta \equiv 1 \pmod 4$.	$\Delta \equiv 2 \pmod 4$.
3	5	2, 6
5	1, 9	6, 10
7	5, 13	10, 14
11	13, 21	6, 18, 22
13	1, 17, 25	10, 22, 26
17	9, 25, 33	18, 30, 34
19	13, 27, 39	2, 22, 34, 38

» On y remarque que $n = 11$ conduit à trois déterminants $\equiv 2 \bmod 4$, auxquels correspondent seulement deux classes dans l'ordre primitif, le déterminant -18 fournissant en outre une classe dérivée de $(1, 0, 2)$. Ce cas donnera donc les polynômes $F_2(x, \Delta)$ pour les valeurs $\Delta = 2, 6, 18, 22$, et nous le choisirons comme exemple de la marche qu'on peut suivre dans ce genre de calcul.

» J'observe à cet effet qu'en disposant dans un ordre convenable les termes de l'équation donnée par M. Sohnke, on peut l'écrire :

$$\begin{aligned} &v^{12} - u^{12} + 44 u^6 v^6 (v^4 - u^4) + 165 u^4 v^4 (v^4 - u^4) + 44 u^2 v^2 (v^4 - u^4) \\ &+ 32 v^{11} v^{11} - 22 u^3 v^3 (v^8 + u^8) + 88 u^9 v^9 + 132 u^7 v^7 - 132 u^5 v^5 - 88 u^3 v^3 \\ &+ 22 uv (v^8 + u^8) - 32 uv = 0, \end{aligned}$$

ou bien, en mettant en évidence le facteur $v^4 - u^4$,

$$\begin{aligned} &(v^4 - u^4)(v^8 + u^8 + 44 u^6 v^6 + 166 u^4 v^4 + 44 u^2 v^2) \\ &+ 10 uv (u^{10} v^{10} + 11 u^8 v^8 + 22 u^6 v^6 - 22 w^4 - 11 u^2 v^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

» Or en faisant $uv = w$, la relation

$$u^4 = -\frac{v^4 - 1}{v^4 + 1},$$

ou

$$u^4 v^4 + u^4 v^4 - 1 = 0,$$

donne

$$v^4 + u^4 = 1 - w^4,$$
$$v^8 + u^8 = 1 - 2w^4 + w^6,$$
$$v^4 - u^4 = \sqrt{1 - 6w^4 + w^8};$$

de sorte qu'on peut immédiatement déduire de l'équation modulaire une relation contenant seulement w, savoir :

$$\sqrt{1 - 6w^4 + w^8}\,(w^8 + 44w^6 + 162w^4 + 44w^2 + 1)$$
$$+ 10w\,(w^{10} + 11w^8 + 22w^6 - 22w^4 - 11w^2 - 1) = 0.$$

Or, en faisant disparaître le radical on parvient à une équation réciproque en w^2, ce qui conduit à poser

$$w^2 + \frac{1}{w^2} = z,$$

et on trouve ainsi :

$$(z^2 - 8)(z^2 + 44z + 160)^2 - 100(z - 2)(z^2 + 12z + 32)^2 = 0$$

ou

$$z(z + 4)^2(z - 20)(z^2 + 192) = 0.$$

» Maintenant nous observerons qu'en faisant $u^8 = x$, on a

$$w^4 = \sqrt{x}\,\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \quad \text{et} \quad w^4 + \frac{1}{w^4} - 2 = \frac{(x + 1)^2}{\sqrt{x}\,(x - 1)}.$$

» Ainsi l'expression $\frac{(x + 1)^4}{x(x - 1)^2}$ dont il a été déjà parlé comme entrant essentiellement dans la composition des équations que nous voulons obtenir, se présente ici d'elle-même, et puisque

$$w^4 + \frac{1}{w^4} - 2 = z^2 - 4,$$

la quantité α sera liée à z par cette relation très-simple $\alpha = -(z^2-4)^2$. Il en résulte que l'équation en x est le produit des facteurs suivants :

$$(x+1)^4 - 2^4 x(x-1), \quad [(x+1)^4 - 3^2 . 2^4 x(x-1)^2]^2,$$
$$[(x+1)^4 - 7^4 . 2^4 x(x-1)^2]^2$$

et

$$(x+1)^4 - 11^2 . 3^4 . 2^4 x(x-1)^2,$$

le dernier qui répond à la valeur la plus élevée de Δ, étant le seul qui n'entre pas au carré, car $(x+1)^4 - 2^4 x(x-1)^2 = (x^2-6x+1)^2$. Et comme ils sont écrits en suivant l'ordre des valeurs croissantes de la quantité α, ils correspondent respectivement à $\Delta = 2, 6, 18, 22$, puisque, abstraction faite du signe, α augmente avec Δ d'après la relation

$$16\alpha = -\left(e^{\pi\sqrt{\Delta}} + 104 + \ldots\right).$$

» XI. Le polynôme $\mathcal{F}_2(x, \Delta)$, dans le cas le plus simple où l'on a $\Delta = 7$, s'obtient immédiatement par les équations fondamentales

$$u^2 = \frac{1-v^2}{2iv^2}, \quad u^8 = 1 - x,$$

en supposant $v = u$, et supprimant dans le résultat le facteur x. On trouve ainsi l'équation

$$16x^2 - 31x + 16 = 0.$$

Pour les valeurs suivantes de Δ, le calcul devient plus difficile, et c'est en recourant à des méthodes particulières, que le P. Joubert, dans un travail important sur le discriminant des équations en $U = \sqrt[4]{kk'}$ et $V = \sqrt[4]{\lambda\lambda'}$, a réussi à obtenir ces polynômes pour $\Delta = 15, 23, 31$. Je me bornerai à donner l'idée de ces procédés et des méthodes variées qu'on peut suivre dans ces recherches en considérant le cas de $\Delta = 15$.

» Alors on a dans l'ordre improprement primitif, deux formes conduisant aux équations types

$$(2, 1, 8)_1 = 0, \quad (4, 1, 4)_2 = 0;$$

et si l'on fait pour un instant $(4, 1, 4) = \varpi$, ou $2\omega^2 + \omega + 2 = 0$ et $\xi = \varphi^2(\omega)\psi^2(\omega)$, on trouvera très-aisément l'équation en ξ, en remarquant qu'on peut écrire

$$2\omega + 1 = -\frac{2}{\varpi},$$

d'où

$$\psi(2\omega+1) = \psi\left(-\frac{2}{\omega}\right) = \varphi\left(\frac{2}{\omega}\right),$$

et, par suite, en élevant à la puissance quatrième,

$$\frac{1+\psi^4(\omega)}{2\psi^2(\omega)} = \frac{2\varphi^2(\omega)}{1+\varphi^4(\omega)}.$$

Comme on a d'ailleurs $[\varphi^4(\omega)+\psi^4(\omega)]^2 = 1+2\xi^2$, on trouvera

$$1+\xi^2+\sqrt{1+2\xi^2} = 4\xi,$$

ce qui donne

$$(\xi-2)(\xi^2-6\xi+4) = 0.$$

» Le facteur du second degré convient seul, et on en tire l'équation en x, en remarquant qu'on doit supposer $x = \varphi^8(\omega+1) = \frac{\varphi^8(\omega)}{\varphi^8(\omega)-1}$, de sorte qu'on aura

$$\xi^4 = \frac{x}{(x-1)^2},$$

et, par suite,

$$2^8(x-1)^4 - 2^4.47\,x(x-1)^2 + x^2 = 0.$$

» Cette équation, conformément à ce qu'on a dit en général, a pour coefficient de x^4 une puissance de 2, et la forme particulière sous laquelle elle se présente permettra d'en déduire très-facilement la transformée, qui correspond à l'ordre proprement primitif (*), savoir :

$$(x-1)^4 - 2^8.47\,x(x-1)^2 + 2^{16}x^2 = 0,$$

et de vérifier ainsi que dans cette transformée le coefficient de la puissance de x redevient égal à l'unité.

» XII. Nous possédons maintenant tous les éléments qui figurent dans le discriminant de l'équation modulaire du 12e degré, qui sont les facteurs relatifs à l'ordre improprement primitif de déterminant -7, et à l'ordre primitif de déterminant -24. Le premier, comme on vient de le trouver, est $16x^2-31x+16$. Le second doit être tiré de l'équation

$$(x+1)^4 - 3^2.2^4\,x(x-1)^2 = 0,$$

(*) Voyez *Comptes rendus*, t. XLVIII, p. 1098.

qui correspond au déterminant -6, en y remplaçant x par $\frac{1}{2}+\frac{x+1}{4\sqrt{x}}$, et faisant disparaître $\sqrt{x}$ par l'élévation au carré (*). On trouve ainsi l'expression

$$x^8 - 301960x^7 + 3550492x^6 + 19797821768x^5 + 13017608x^4 \\ + 19797821768x^3 + 3550492x^2 - 301960x + 1;$$

ce qui conduit au résultat déjà donné, et qu'il eût été bien difficile, comme on voit, de tirer algébriquement de l'équation modulaire. Il ne me reste plus, pour terminer cette partie de mes recherches, qu'à indiquer un moyen de le vérifier, ce qui sera l'objet d'un prochain article. »

MÉTÉOROLOGIE. — *Recherches sur les ombres colorées qui se manifestent à diverses heures, en diverses saisons, et sur les applications du phénomène; par* **M. J. Fournet**. (Suite.)

» L'influence d'un sol couvert de son linceul blanc de l'hiver devait nécessairement être étudiée; mais bien que pendant les deux dernières saisons j'aie guetté les occasions de me rendre compte des effets que la neige est capable de produire, leur douceur exceptionnelle me fut très-impropice. Cependant je crois devoir rendre compte des résultats obtenus, parce qu'ils pourront mettre d'autres observateurs mieux favorisés à même de compléter ma tâche.

» Conformément à ma coutume, j'ai d'abord examiné une large flaque étalée à proximité sur une pente du mont Ceindre, près de Lyon. C'était le 24 janvier 1858, à 3 heures de l'après-midi, et j'avais alors la température de $-0°,9$, un ciel qu'une tempête mugissante du nord s'efforçait d'épurer, mais qui conservait obstinément une suffisante quantité de vapeur pour que le soleil fût légèrement jauni. Sous l'empire de ces conditions, les con-

---

(*) J'ai donné inexactement, t. XLVIII, p. 1098, la substitution $x=-\frac{1}{2}+\frac{y+1}{2\sqrt{y}}$, au lieu de celle qui vient d'être employée : $x=\frac{1}{2}+\frac{y+1}{4\sqrt{y}}$. J'indiquerai aussi, t. XLVIII, p. 1080, dans l'équation $4\nu=\mathfrak{N}^2-\mathfrak{N}-\Delta_n-4\Delta'_n$, la correction suivante : $4\nu=\mathfrak{N}^2-\mathfrak{N}-N-4N'$. Enfin, dans les expressions de Δ_n et Δ'_n, on doit remplacer $\sum\delta^2\delta'$ par $\sum\delta\delta'$; $\delta^2\delta' \leqq n$ par $\delta\delta' < n$, et la condition $\left(\frac{2}{\delta}\right)=\left(\frac{2}{\delta'}\right)$ par $\left(\frac{2}{\delta}\right)=\left(\frac{2}{n\delta'}\right)$. J'ajouterai, ce que j'ai omis de dire, que les diviseurs δ et δ' peuvent être pris égaux entre eux et égaux à l'unité.

cavités de la neige possédaient une demi-transparence indiquée par le joli bleu de leurs parois, de sorte que dans cet état de congélation l'eau conserve la propriété azurante qu'elle possède étant liquide. Cependant l'ombre qui en résultait était d'un bleu pur, sans doute parce que l'ensemble de la nappe, beaucoup plus étendue que la somme des dépressions, reflétait sur le papier la masse surabondante du jaune qu'elle recevait du soleil.

» Le 27 février suivant, il était tombé une forte quantité de neige; mais elle était fondante sous l'influence d'un fort vent du sud qui éleva rapidement la température à 8°,5, en chassant vivement une quantité de nuées blanches, vaporeuses, débris du stratus neigeux. A 1 heure du soir je montai sur une terrasse de la Croix-Rousse, afin d'avoir devant moi la grande plaine qui s'étend de Lyon au Jura. Alors, tournant le dos au soleil, j'obtenais encore une ombre d'un bleu caractérisé dans les moments où ses rayons perçaient, et passant au gris quand la face de l'astre était voilée. Ces apparences se soutenaient d'ailleurs, malgré les précautions dont je m'entourais pour éliminer les influences étrangères; mais d'assez larges surfaces de la plaine étaient déjà dénudées, et leur interposition compliquait nécessairement l'action de la neige.

» Cet inconvénient était sans doute grave, et pourtant le rapprochement du résultat d'alors avec celui du 24 janvier me conduit à admettre que, malgré son apparente blancheur générale, la neige doit refléter l'orangé solaire en quantité suffisante pour produire des ombres bleues. En cela son rôle serait analogue à celui d'une terre aride.

» Léonard de Vinci admettait qu'une mer agitée n'a point d'ombre universelle. On conçoit en effet que les facettes de cette nappe, dont les rides inconstantes se déforment continuellement, doivent étrangement modifier les apparences optiques selon les caprices des vents et selon les positions de l'observateur. S'il a le soleil en face, les rayons réfléchis par des milliers de miroirs concaves, convexes, dilatent prodigieusement l'irradiation qui serait résultée d'une simple mer d'huile. Si le soleil est derrière lui, il retrouvera encore une réflexion subdivisée par les prismes aqueux, et celle-ci formera également une large traînée éblouissante. Le clapotage, une mer moutonneuse, blanchissante, ne produiront point les phénomènes de la grande houle. D'ailleurs, selon les troubles du rivage, selon les profondeurs, il aura une eau tantôt verte, tantôt azurée. Enfin un ciel couvert doit altérer les ombres qu'aurait formées un ciel pur.

» En butte à ces variations incessantes, j'ai pensé qu'il fallait me con-

tenter de noter les apparences telles qu'elles se sont successivement manifestées, en élaguant toutefois les répétitions inutiles, et quant à mes observations, je les fais autant que possible en me plaçant à angle droit du soleil, afin d'éviter ses reflets trop ardents dont je n'avais à attendre que des ombres noires ou indéterminables.

» Le 2 mars 1858, à 11 heures du matin, le ciel azuré étant parsemé de cumulus blancs, une partie de l'étang de Berre, où l'eau paraissait d'un bleu passablement pur, m'a donné un rose légèrement empourpré et fort beau.

» Dans la même matinée, une branche de cette mer intérieure se trouvant fortement souillée par le limon ocreux introduit par les rivières débordées, qui y formait de larges nuages flottants, les ombres passaient rapidement du gris verdâtre au jaune mélangé de vert selon l'irrégulière distribution des troubles. En ce moment, d'ailleurs, il m'était impossible de me soustraire à la répercussion des rayons solaires, de sorte qu'il faut voir dans ces colorations l'effet complexe d'une combinaison donnant naissance à une lumière suffisamment rouge pour déterminer l'apparition du vert en question. Cette tendance fort curieuse se reproduira d'ailleurs dans d'autres occasions.

» Le 28 mars suivant, entre 6 et 7 heures du matin, le soleil éclairant assez fortement en jaune malgré les états brumeux de l'atmosphère basse et nuageux de la voûte céleste, la surface de la même pièce d'eau déterminait la formation d'une ombre rose pure, mais pâle.

» A 5 heures du soir, au Prado, près de Marseille, je pus choisir une position convenablement ombragée, à 20 mètres au-dessus de la surface de l'eau, et à angle droit d'un soleil éclatant. L'eau du golfe était d'ailleurs verdâtre près du rivage, bleue au large et de plus très-mouvementée. Néanmoins, l'ombre affectait une teinte rose purpurine fort agréable.

» Le 2 avril 1858, à $7^h 30^m$ du matin, le long du cordon littoral qui sépare l'étang de Thau de la mer, celle-ci avait un aspect plus verdâtre et de rares nuages étaient dispersés sur le ciel. Les ombres étaient roses vivement teintées.

» Le 4 avril, à Agde, vers 11 heures du matin, l'atmosphère d'une transparence parfaite laissait voir nettement les Pyrénées. Au fort de Briscou, que j'avais choisi pour mes observations à cause de sa situation écartée du rivage, sur un écueil basaltique noir, l'ombre devenait rose légèrement carminé, quand je me plaçais au bas des murs. Du haut du phare, elle était plus décidément violacée.

» Le 9 avril 1859, étant à bord du *Kabyle* à la latitude nord 39° 40′ longitude est 3° 57′, à 9 heures du matin, le ciel méditerranéen prenait un aspect cirreux et la mer se trouvait colorée en bleu indigo foncé. Du haut du pont, en retournant le carnet de manière que, se trouvant presque horizontal, il reçût aussi exactement que possible de bas en haut le reflet de la mer, l'ombre affectait une nuance jaunâtre-grise.

» Dans quelques autres promenades maritimes, le temps et la mer ont été trop défavorables, trop couverts, trop tourmentés, pour se prêter à quelque chose de suffisamment explicite, de sorte que pour le moment il reste acquis qu'il peut émaner de la plaine liquide des clartés capables de faire naître des ombres vertes, roses, plus ou moins violacées, et enfin jaunes. Malgré sa vaste étendue, elle n'a donc point d'ombre universelle, pour me servir de l'expression de Léonard de Vinci. Mais aussi, au rebours du monotone monochromisme de la terre nue, la surface diaprée de notre Méditerranée se prête aux apparitions les plus variées, et tant pis pour les touristes qui, bâtés d'une équivoque poésie, ne saisissent dans cette coquetterie qu'une invariable mer bleue, surmontée d'un ciel bleu et dans laquelle un rocher lointain baigne platement son pied bleu. Encore, pour éviter les confusions dans une question purement scientifique, ai-je dû faire abstraction de toutes les colorations incidentes provenant du ciel et des rivages. »

MÉMOIRES LUS.

OPTIQUE. — *Recherches sur divers effets lumineux qui résultent de l'action de la lumière sur les corps* (3ᵉ Mémoire : Composition de la lumière émise); *par* **M. Edmond Becquerel**. (Extrait par l'auteur.)

(Commissaires précedemment nommés : MM. Pouillet, Babinet.)

« Dans ce nouveau travail j'ai continué les recherches que j'ai entreprises sur les propriétés lumineuses qui résultent de l'action de la lumière sur les corps, et d'après lesquelles ces derniers agissent comme de nouvelles sources lumineuses. Le phosphoroscope, décrit dans le second Mémoire, en rendant continue sur la rétine l'impression de la lumière émise, a permis d'en étudier la composition et de reconnaître comment se modifient les effets suivant la nature, l'état physique des corps, ainsi que l'intensité et la réfrangibilité des rayons actifs.

» Un très-grand nombre de minéraux, de sels, donnent des effets lumi-

neux, tandis que d'autres substances, comme les métaux, n'ont offert aucune action appréciable. On doit observer que l'émission de lumière dans le phosphoroscope est limitée à la sensibilité de la rétine, à l'intensité des rayons actifs et à une certaine durée de persistance due à l'impression reçue par le corps; cette durée ne peut être représentée par un temps déterminé qu'en ce qui concerne les effets appréciables à nos yeux, car on peut concevoir qu'après l'influence du rayonnement, les corps continuent à émettre des rayons lumineux dont l'intensité est trop faible pour impressionner la rétine. D'un autre côté, en supposant même que les corps ne soient pas visibles dans l'appareil, on ne peut dire qu'ils n'aient reçu aucune modification, car la lumière pourrait exciter des vibrations d'une autre vitesse que celle des rayons lumineux, et dont la longueur d'onde serait plus grande que celle des rayons actifs, lesquelles vibrations seraient capables de donner lieu à des effets de chaleur ou à d'autres actions moléculaires encore inconnues.

» Les résultats consignés dans ce travail permettent de déduire les conséquences suivantes :

» 1°. Lorsque la lumière vient frapper un corps, celui-ci, en vertu d'une action qui lui est communiquée, peut agir comme source lumineuse en émettant des rayons de diverse réfrangibilité dont la durée est très-variable (elle peut être inférieure à $\frac{1}{5000}$ de seconde et dépasser plusieurs heures), et dont l'intensité est fonction de celle de la lumière incidente et toujours plus faible que cette dernière. Tous les corps ne donnent pas des effets appréciables; parmi les substances qui jouissent de ce pouvoir au plus haut degré, on peut citer les différentes combinaisons à bases alcalines et terreuses, et un certain nombre de sels métalliques; la plupart des autres substances transparentes et translucides, et surtout celles d'origine organique, présentent des effets beaucoup plus faibles, quoique sensibles. Les substances fortement colorées et les métaux n'ont donné lieu à aucun effet.

» 2°. L'état solide du corps est le plus propre à montrer les phénomènes dont il s'agit; cependant, l'effet observé dans les rayons ultra-violets avec plusieurs liquides prouve que ces derniers sont doués d'actions de ce genre, sans avoir pu être observés dans le phosphoroscope; d'un autre côté, quand on emploie une disposition particulière, et à l'aide d'un appareil d'induction, l'oxygène acquiert le pouvoir d'émettre de la lumière qui persiste même après la cessation du passage de l'électricité.

» 3°. L'effet lumineux appartient à la masse du corps soumis à l'expérience et ne tient pas à une action de surface; il a lieu quelle que soit

l'incidence du rayon actif et ne dépend que de son intensité et de sa réfrangibilité.

» 4°. L'effet observé dans le phosphoroscope après l'action de la lumière incidente existe néanmoins d'une manière permanente pendant l'influence de celle-ci; cette conclusion résulte de l'identité des effets optiques observés quand certains corps sont placés dans le phosphoroscope ou bien exposés d'une manière continue à l'action des rayons violets.

» 5°. Un même corps soumis à l'action de la lumière peut émettre des rayons d'une durée inégale; telles sont les causes des changements de nuances de ce corps en faisant varier la vitesse de rotation du disque du phosphoroscope, et ainsi qu'on l'observe avec le diamant, le carbonate, le phosphate et le silicate de chaux, le carbonate de strontiane, l'hydrate de potasse, etc.

» Souvent, parmi les effets observés avec un même corps, on distingue deux nuances prédominantes, mais il peut s'en présenter davantage, comme le fluorure de calcium en offre un exemple. Ces effets lumineux différents existent ensemble et ne se produisent pas successivement; ils n'apparaissent les uns après les autres dans le phosphoroscope qu'en vertu de l'inégale persistance des rayons émis.

» 6°. Il n'y a aucun rapport entre la réfrangibilité des rayons émis et la persistance plus ou moins grande de ceux-ci. Chaque substance a son action propre : tantôt ce sont les rayons les plus réfrangibles dont l'effet est le plus prolongé (carbonate et silicate de chaux); tantôt le contraire a lieu (diamant, bisulfate de quinine, platino-cyanure de potassium); avec le fluorure de calcium les rayons d'une réfrangibilité moyenne ont la persistance la moindre; les rayons les moins réfrangibles ont une durée un peu supérieure et ensuite les rayons les plus réfrangibles.

» 7°. Un même corps peut être influencé par des rayons de réfrangibilité différente et peut émettre, sous l'action de chacun de ceux-ci, des rayons qui diffèrent non-seulement en durée, mais encore en réfrangibilité; dans ce cas, ce corps ne donne lieu qu'à des rayons dont la réfrangibilité est moindre que celle du rayon actif, ou au plus égale. Ainsi en impressionnant successivement un corps par des rayons violets, bleus, verts, etc., de moins en moins réfrangibles, la réfrangibilité des rayons émis en vertu de l'action propre du corps peut varier, et si elle varie, elle ne présente que des rayons de moins en moins réfrangibles, comme l'analyse prismatique le démontre.

» En d'autres termes, les images prismatiques données par les rayons émis en vertu de l'action de rayons incidents simples diminuent de lon-

gueur à partir du côté violet, à mesure que la réfrangibilité du rayon incident diminue et varie du violet au rouge. Les changements de couleur observés avec la potasse caustique, le fluorure de calcium, le sulfure de calcium, sont dus à cette cause. Ainsi quand un corps est impressionné par les rayons orangés, il ne peut émettre que des rayons orangés ou rouges; s'il est impressionné par le rouge, il ne peut présenter d'autre couleur que cette dernière.

» Dans certains cas où j'avais observé une émission de rayons dont la longueur d'onde était moindre que celle des rayons émis, j'ai constaté que le phénomène lumineux était compliqué par des effets de phosphorescence par élévation de température qui ne sont pas soumis aux mêmes lois.

» 8°. Les limites de réfrangibilité entre lesquelles les corps sont impressionnables, c'est-à-dire les longueurs du spectre solaire actif, dépendent de la nature et de l'état moléculaire des corps; en général les limites sont d'autant plus étendues, que la lumière émise par le corps a une réfrangibilité moindre (exemples : alumine, aluminate de magnésie), sans cependant qu'il y ait de règles fixes à cet égard. D'un autre côté, les spectres des rayons actifs peuvent présenter plusieurs maxima d'action, comme le prouvent le phosphate de chaux et la leucophane.

» 9°. Les changements de couleur que certains corps présentent par suite de différences dans la réfrangibilité des rayons actifs sont d'autant plus grands, que les corps émettent des rayons dont les réfrangibilités sont plus dissemblables entre elles et dont les images prismatiques sont plus étendues; mais avec les corps comme l'alumine, les composés d'uranium, etc., avec lesquels ces conditions ne sont pas remplies, les changements sont à peine appréciables.

» 10°. Chaque corps a son action propre, et la composition de la lumière qu'il émet peut servir dans certains cas à spécifier sa composition et son état physique; on peut citer à ce propos l'alumine, ainsi que certaines de ses combinaisons, le diamant, etc.

» Dans quelques cas on observe avec le même corps une action due à la composition chimique de ce dernier et une action dépendant d'un état moléculaire particulier. Ainsi, par exemple, le diamant donne toujours une émission de rayons peu réfrangibles (orangés et jaunes), effet dû à la nature de la substance; et quelquefois seulement, conjointement avec ce premier effet, une émission de rayons plus réfrangibles (bleus), d'une moindre durée, dépendant d'un état moléculaire du corps et auquel est due la coloration bleue dans la partie ultra-violette du spectre solaire. D'au-

tres substances, comme le carbonate de chaux, se comportent de même.

» 11°. L'identité de composition de la lumière émise par les corps placés dans le phosphoroscope ou exposés à l'action des rayons extrêmes violets, permet de conclure à l'identité des causes de la lumière émise par phosphorescence et par fluorescence. Tels sont les effets lumineux donnés par l'alumine (rubis), l'aluminate de magnésie (spinelle), les composés d'uranium, le diamant, qui sont les mêmes et qui conduisent aux mêmes séries de raies noires et de lignes lumineuses dans l'appareil et dans les rayons solaires les plus réfrangibles

» 12°. Les rayons émanés des corps en vertu de leur action propre, lorsque ces corps sont placés dans le phosphoroscope, agissant pour ainsi dire d'une manière continue, peuvent donner lieu à d'autres effets qu'à des impressions sur la rétine; ils rendent lumineuses des substances phosphorescentes et produisent des actions chimiques sur les matières impressionnables en raison de leur intensité et de leur réfrangibilité, et ainsi que le font les rayons solaires. Dans un prochain Mémoire je m'occuperai spécialement de ces effets qui offrent un exemple remarquable de transformation des forces physiques l'une dans l'autre.

» Ces conclusions montrent toute l'importance de ces nouvelles recherches dont les résultats peuvent être invoqués dans l'étude de plusieurs questions de physique moléculaire, servent à éclairer différents points d'analyse chimique, et permettent d'aborder les phénomènes relatifs à l'absorption de la lumière, c'est-à-dire les phénomènes qui concernent une des parties les moins connues de l'optique. »

CHIMIE APPLIQUÉE. — *Recherches chimiques et analyses sur l'aérolithe de Montrejeau; par* **M. A. Damour.**

(Renvoi à la Commission précédemment nommée pour diverses communications relatives à ce même aérolithe, Commission qui se compose de MM. Pelouze, Fremy et Delafosse.)

« La pierre météorique tombée le 9 décembre dernier aux environs de Montrejeau (Haute-Garonne) a déjà été l'objet d'intéressantes analyses présentées à l'Académie, en premier lieu par MM. Filhol et Leymerie (17 janvier 1859), et ensuite par MM. Chancel et Moitessier (7 février 1859). Le travail dont j'ai l'honneur d'exposer aujourd'hui les résultats a eu pour but d'étudier l'action de divers réactifs sur cette matière météorique.

» J'ai trouvé, pour la densité de cette pierre, le nombre 3,51, sur un

échantillon pesant 47 grammes, et 3,57 sur $3^{gr},9365$ de la même matière réduite en petits fragments.

» Chauffée dans le tube ouvert, la pierre dégage une odeur sulfureuse très-sensible. Exposée à la flamme du chalumeau, elle fond sur les bords en une scorie noire. Un échantillon du poids de $3^{gr},7580$ étant chauffé à la chaleur du rouge blanc produite par la lampe de M. H. Deville, s'est fondu en une scorie noire vitreuse qui a perforé le creuset. Cette scorie a toute l'apparence extérieure de la croûte noire très-mince qui recouvre l'aérolithe.

» La pierre ainsi fondue, étant réduite en petits fragments, n'a plus qu'une densité de 3,29 au lieu de 3,57 qu'elle avait avant sa fusion.

» Une dissolution bouillante de carbonate de soude ne lui a pas enlevé de silice.

» Le barreau aimanté a retiré $0^{gr},1160$ de grains métalliques sur 1 gramme de matière pulvérisée.

» Un mélange d'acide fluorhydrique et sulfurique la dissout, en laissant inattaqués de petits grains de fer chromé.

» L'iode mis en contact à froid avec l'aérolithe pulvérisé et placé dans un vase contenant de l'eau, en dissout lentement les parties métalliques (1).

» Le brome en contact avec l'eau exerce une action dissolvante plus rapide encore sur les parties métalliques et sulfureuses contenues dans la pierre (2).

» En opérant sur $14^{gr},1174$ de matière, l'eau bromée a dissous les éléments suivants :

		Sur 1 gramme.
Fer	2,3951	0,1697
Nickel	0,2023	0,0144
Cuivre	0,0080	0,0006
Magnésie	0,8500	0,0602
Silice	0,6270	0,0444
	4,0824	0,2893
Matière inattaquée	10,0050	0,7087
	14,0874	0,9980

(1) L'iode en contact avec l'eau attaque, même à froid, la plupart des sulfures; il se forme un iodure plus ou moins soluble dans l'eau, selon la nature du métal : du soufre se dépose en poudre légère dont une partie se combine avec l'excès d'iode. Il ne se forme qu'une très-minime quantité d'acide sulfurique. Les arséniures, tellurures, séléniures, sont également attaqués par l'iode en présence de l'eau.

(2) Le brome en contact avec l'eau attaque les composés sulfurés, arséniés, tellures,

La liqueur renfermait en outre un peu d'acide sulfurique provenant des sulfures attaqués par le brome.

» On a reconnu la présence du cuivre en évaporant à siccité la liqueur contenant les bromures et reprenant le résidu par l'eau et l'acide chlorhydrique. Après avoir séparé la silice, on a traité la liqueur par l'hydrogène sulfuré qui a précipité du sulfure de cuivre.

» La recherche du chlore, du fluor et du carbone n'a donné que des résultats négatifs.

» Quant au phosphore, je n'en ai trouvé qu'une assez faible proportion en fondant avec du carbonate de soude chacun des oxydes séparés dans le cours de l'analyse et traitant la dissolution alcaline par les réactifs appropriés.

» Pour doser le soufre, j'ai attaqué l'aérolithe par un mélange d'eau, de brome et d'acide nitrique : le soufre a été transformé en acide sulfurique. Un gramme de matière a donné $0^{gr},0148$ de soufre, qui correspond à $0^{gr},0374$ de pyrite magnétique.

» Un gramme de grains métalliques, séparés de la matière pierreuse, a été mis en contact avec de l'eau très-faiblement acidulée par l'acide chlorhydrique et avec du chlorure d'argent fondu. La matière métallique s'est dissoute avec un faible dégagement d'hydrogène sulfuré : quelques fragments de matières siliceuses et de fer chromé sont restés sur l'éponge d'argent réduit.

» La liqueur renfermant le chlorure étant évaporée à siccité et reprise par l'eau acidulée, a laissé un faible dépôt de silice.

» Un gramme de grains métalliques a donné :

Fer	0,7441
Nickel	8,0822
Magnésie	0,0120
Silice gélatineuse	0,0310
Silicates et fer chromé	0,1371
Cuivre	traces.
	1,0064

» L'aérolithe de Montrejeau dégagé de ses grains métalliques, étant mis en digestion, à froid, avec de l'acide acétique étendu d'un peu d'eau, est

plus rapidement que ne fait l'iode. Le soufre du sulfure passe en partie à l'état d'acide sulfurique : une autre partie se dépose à l'état spongieux.

partiellement décomposé; il se dissout de la silice, de la magnésie, de l'oxyde de fer en quantités notables et donnant la composition de péridot-olivine.

		Oxygène.		Rapports.
Silice	0,3910		0,2030	1
Magnésie	0,3407	0,1339	0,1892	1
Oxyde ferreux	0,2490	0,0553		
Oxyde de nickel	0,0081			
	0,9888			

» J'ai constaté que le péridot des roches basaltiques, celui du Vésuve, et celui qui se trouve dans les cellules du fer météorique de Pallas, se laissent dissoudre en proportion très-notable dans l'acide acétique.

» L'acide oxalique en dissolution dans l'eau attaque le péridot-olivine.

» Un gramme de l'aérolithe, séparé des grains métalliques, renferme :

Partie soluble (péridot-olivine)	0,5412
Partie insoluble	0,4588
	1,0000

» La partie insoluble dans les acides constitue les grains et noyaux globuleux qui donnent à l'aérolithe sa structure oolitique. Cette matière se distingue extérieurement du péridot-olivine par son opacité et par sa couleur gris-verdâtre. Elle fond en scorie noire à la flamme du chalumeau, tandis que le péridot y reste infusible.

» L'analyse de cette matière a donné les résultats suivants :

Silice	0,5590		0,2902
Magnésie	0,1907	0,0749	0,1189
Oxyde ferreux	0,1518	0,0337	
Chaux	0,0210	0,0060	
Soude	0,0148	0,0038	
Potasse	0,0029	0,0005	
Alumine	0,0486		
Oxyde de chrome	0,0090		
Fer chromé	0,0060		
Oxyde de manganèse	traces.		
	1,0038		

» Cette composition se rapproche un peu de celle des pyroxènes. La présence de l'alumine et des alcalis potasse et soude ferait présumer qu'il y a

mélange d'un feldspath : on pourrait alors présenter les résultats de l'analyse ainsi qu'il suit :

Pyroxène	Silice..........	0,4534	......	0,2354	2
	Magnésie........	0,1907	0,0749		
	Oxyde ferreux...	0,1518	0,0337	0,1146	1
	Chaux..........	0,0210	0,0060		
Albite...	Silice..........	0,1056	.....	0,0548	12
	Alumine........	0,0293	......	0,0137	3
	Soude, Potasse...	0,0177	......	0,0045	1
	Oxyde de chrome.	0,0090			
	Fer chromé......	0,0060			
	Alumine........	0,0193			
		1,0038			

» L'aérolithe présente, dans sa composition générale, les espèces suivantes :

Alliage et phosphures de fer, de nickel et de cuivre......	0,1160
Pyrite magnétique..............................	0,0374
Fer chromé..............................	0,0183
Péridot..............................	0,4483
Pyroxène, albite..............................	0,3800
	1,0000

» D'après les essais qui viennent d'être exposés, il n'y a que le cuivre à ajouter à la liste des éléments déjà reconnus par MM. les chimistes qui ont déterminé avant moi la composition de cette pierre météorique ; ces éléments se trouvent ainsi portés au nombre de quatorze, savoir :

Oxygène,	Nickel,	Manganèse,
Soufre,	Cuivre,	Calcium,
Phosphore,	Aluminium,	Sodium,
Silicium,	Chrome,	Potassium.
Fer,	Magnésium,	

» Nous avons vu par les expériences exposées plus haut que cette pierre météorique, soumise à l'action d'une haute température, est complétement fusible en une scorie noire, vitreuse et qui présente beaucoup de rapports extérieurs avec la croûte très-mince qui recouvre les aérolithes en général. Il paraît donc assez probable qu'au moment de l'apparition du phénomène lumineux et de l'explosion qui précèdent la chute de ces corps, la matière

qui la compose subit une fusion rapide, mais seulement à la superficie : la chaleur produite ne pénétrant pas assez rapidement ni assez profondément à l'intérieur de la masse solide peu conductrice pour en déterminer la fusion complète. Ne pourrait-on pas voir quelque analogie entre la production de cette croûte vitreuse des aérolithes et la vitrification superficielle des roches siliceuses qui ont subi l'action de la foudre? Le globe lumineux qui précède la chute des aérolithes serait dû à un phénomène électrique. Ce n'est ici, du reste, qu'une simple hypothèse que je soumets sous toute réserve à l'appréciation des juges compétents (1).

» J'ai signalé, dans ce travail, la décomposition facile que subit le péridot-olivine par l'action des acides acétique et oxalique. Ayant étendu cet essai à d'autres minéraux, j'ai reconnu que les silicates attaquables par les acides nitrique et chlorhydrique se laissaient également décomposer par l'acide acétique. J'ai fait dissoudre ainsi dans ce dernier acide des proportions très-notables de mésotype, d'ockénite, de gadolinite et même de grenat mélanite ($\dot{Ca}^3\dddot{Si} + \ddot{\overline{Fe}}\dddot{Si}$). Cette action des acides végétaux sur des matières minérales silicatées me paraît présenter quelque intérêt au point de vue de la géologie. »

PHYSIQUE APPLIQUÉE. — *Des foyers à alimentation continue et de la combustion des menus combustibles; par* **M. Le Bas.** (Extrait par l'auteur.)

(Commissaires précédemment nommés : MM. Pelouze, Pouillet, Combes.)

« J'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie, en novembre 1847, un Mémoire sur la combustibilité.

» Les conditions essentielles d'une combustion complète et d'une combustion s'opérant avec le minimum d'air sont une forte température et une grande vitesse d'admission de l'air, qui doit être proportionnée à l'absorption du calorique rayonnant.

» Le mode ordinaire de chargement des foyers, consistant en la projection instantanée d'un combustible froid sur un combustible incandescent, est l'une des principales causes de production de fumée, parce que la température et la vitesse diminuent, quand au contraire elles devraient augmenter.

---

(1) L'incandescence de l'aérolithe pourrait aussi être attribuée au frottement que subit la matière en traversant rapidement les couches de l'atmosphère.

» Le présent Mémoire traite des foyers à alimentation continue et spécialement de la combustion des menus combustibles. L'idée que j'ai poursuivie, quoiqu'elle ne fût pas une idée nouvelle, est basée sur le système de la formation de talus par voie d'éboulement d'une masse supérieure. Le combustible est jeté dans une hotte, puis il descend sur une grille inclinée, dont le pan est à peu près parallèle au talus d'éboulement.

» La figure annexée au Mémoire indique un moyen simple et peu coûteux d'éviter la fumée. La hotte est verticale. La grille est à un seul pan, ce pan est courbe, et la courbe adoptée est une demi-anse de panier renversée; l'élément supérieur est vertical et l'élément inférieur est horizontal. Les vides des barreaux sont parallèles au sens du glissement. Le combustible s'éboule sous une voûte surbaissée, la grille s'engage sous la voûte, et dans le prolongement transversal du bas de la grille se trouve de chaque côté du foyer un registre de nettoyage, qui peut aussi servir pour l'appel d'un supplément d'air. Je termine la partie inférieure de l'anse de panier par une grille n'ayant que $0^{m},16$ de longueur et qui tourne autour de son axe, quand on veut faire tomber les scories dans le cendrier. La ligne inférieure des barreaux de la petite grille est un demi-cercle et la partie-avant de ce demi-cercle sert à retenir le talus de combustible, quand on abaisse la partie-arrière.

» La grille sera à deux pans, si la consommation de combustible l'exige. »

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

ÉLECTROCHIMIE. — *Note sur l'influence des électrodes dans les voltamètres à sulfate de cuivre; par* **M. A. Perrot.**

(Commissaires précédemment nommés : MM. Dumas, Regnault.)

« Ayant eu souvent l'occasion de me servir de voltamètres à sulfate de cuivre pour mesurer l'action chimique des courants d'induction, j'ai été conduit à rechercher la cause des phénomènes qu'on observe lorsqu'on fait varier la surface des électrodes. J'ai l'honneur de présenter à l'Académie le résultat de mes recherches.

» On sait que lorsqu'un courant de faible intensité traverse une série de voltamètres à sulfate de cuivre, la quantité de métal déposée dans chacun d'eux diminue lorsque la surface de l'électrode négative augmente. On peut même, en donnant à la surface de cette électrode un développement suffi-

sant, faire disparaître toute action électrolytique dans cette portion du circuit.

» Ce phénomène, attribué à un changement de densité dans le courant et à une conductibilité propre du liquide, peut causer de graves erreurs dans la mesure de l'action chimique des courants. En effet, pour obtenir des résultats exacts, il ne suffit pas de se servir de fils fins comme électrodes, il faut encore que la surface immergée soit la plus petite possible; c'est seulement alors que le gain du fil négatif est égal à la perte du fil positif.

» Si l'on prend pour électrode négative une lame de platine, il peut arriver qu'au bout de plusieurs heures son poids n'ait pas changé, quoique pendant ce temps tous les fils négatifs placés dans le circuit aient gagné quelques décigrammes. Ayant observé qu'en retirant brusquement une lame placée dans ces conditions, on lui trouve toujours un reflet rosé, qui disparaît lorsqu'on plonge cette lame dans une dissolution de sulfate de cuivre, j'ai été conduit à supposer que les différences qu'on observe entre les quantités de métal déposées par un même courant sur des électrodes qui n'ont pas toutes la même surface, devaient, ainsi que l'excès de la perte de l'électrode positive sur le gain de l'électrode négative dans un même voltamètre, être attribuées à une action purement chimique.

» J'ai constaté qu'après avoir été chauffée en présence du cuivre métallique, une dissolution de sulfate de cuivre parfaitement pur possède encore la propriété de dissoudre, à la température ordinaire, une certaine quantité de métal. C'est ainsi qu'une lame de cuivre de 100 centimètres carrés perd un demi-milligramme par heure, lorsqu'on la plonge dans une dissolution de sulfate; cette perte peut s'élever, pendant le même temps, à 3 ou 4 milligrammes, si la lame joue le rôle d'électrode positive ou négative.

» La quantité de cuivre dissoute dans un temps donné augmente avec la surface immergée; elle varie avec la structure du métal et paraît maxima au moment où il est déposé par un courant très-faible. Si l'on place dans le même circuit deux voltamètres, l'un ayant pour électrode des fils de cuivre très-fins et très-courts, et l'autre deux lames de cuivre de même nature et ayant mêmes surfaces, on observe les faits suivants, dont il est facile de se rendre compte.

» Dans le premier voltamètre, il n'y a pas de différence entre le gain de l'électrode négative et la perte de l'électrode positive, on peut en conclure que l'action chimique doit être regardée comme nulle, car, comme elle augmente la perte et diminue le gain, elle ne peut passer inaperçue.

» Dans le second voltamètre, on trouve que la lame positive perd plus que le fil positif du premier voltamètre, car à la perte due à l'action du courant vient s'ajouter celle due à l'action du sulfate de cuivre. Quant à la lame négative, elle peut, si sa surface est assez grande pour que l'action chimique l'emporte sur l'action électrolytique, perdre une partie de son poids. Si les deux actions sont égales, son poids ne varie pas; si enfin l'action chimique le cède à l'action électrolytique, son poids augmente, mais le gain de cette électrode est toujours inférieur au gain du fil négatif du premier voltamètre, et il y a entre ces deux gains, à peu de chose près, la même différence que celle qui existe entre les deux pertes des électrodes positives.

» J'ai obtenu dans toutes mes expériences des résultats semblables. Tandis que, dans un voltamètre à fil fin, je constatais un gain de 10 milligrammes et une perte égale à l'autre pôle, je trouvais dans un premier voltamètre à grandes lames un gain de $5^{\text{millig}},5$ et une perte de 14 milligrammes; dans un second voltamètre, le poids de l'électrode négative n'avait pas changé, tandis que l'électrode positive avait perdu $19^{\text{millig}},5$. Enfin, dans d'autres expériences, il est arrivé que les deux électrodes avaient perdu.

» Il est permis de conclure que toutes les fois que la tension d'un courant sera suffisante, on devra préférer le voltamètre à fil fin. Lorsque le dépôt de cuivre est pulvérulent, on peut, par la perte du fil positif, connaître exactement le travail chimique du courant.

» Si l'on a recours à un voltamètre à grandes électrodes, on devra, pour se rapprocher le plus possible de l'expression exacte, faire la somme de la perte et du gain des électrodes, et prendre la moitié du chiffre obtenu. L'erreur que l'on commet alors croît avec le temps pendant lequel l'électrode reste plongée dans l'électrolyte; elle croît aussi avec la surface immergée; pour une électrode de 100 centimètres carrés de surface, elle ne paraît pas dépasser un quart de milligramme par heure.

» On doit attribuer la différence qui existe entre la quantité de cuivre dissoute chimiquement au pôle positif et celle dissoute pareillement au pôle négatif, au fait que l'état moléculaire de ce dernier pendant que le cuivre s'y dépose est beaucoup plus favorable à l'action dissolvante de l'électrolyte, les molécules se déposant présentent en quelque sorte toute leur surface, tandis que celles qui composent l'électrode positive ne présentent que leur face extérieure. »

PHYSIQUE. — *Note sur l'aspect de l'étincelle d'induction dans le microscope et les spectres de la lumière électrique dans le vide; par* **M. Th. du Moncel.** (Extrait par l'auteur.)

(Commissaires précédemment nommés : MM. Dumas, Regnault.)

« Les conclusions du travail que j'ai l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie sont :

» 1°. Que l'étincelle d'induction développée entre deux rhéophores métalliques à l'air libre présente, dans le microscope, au pôle positif et au pôle négatif, les lumières *rouge* et *bleue* que l'on remarque dans l'étincelle échangée au sein du vide, et ne diffère de celle-ci que par un jet de lumière jaune-verdâtre continu, qui semble constituer l'étincelle proprement dite, et qui s'échange directement d'un rhéophore à l'autre en traversant les couches de lumières rouge et bleue.

» 2°. Que, comme dans le vide, la lumière rouge de l'étincelle au pôle positif est la plus développée, et ne s'arrête qu'à une petite distance du pôle négatif, en se moulant, pour ainsi dire, sur le ruban de lumière bleue qui borde le rhéophore négatif, et dont elle est séparée pourtant par une bande obscure très-caractérisée. Elle semble d'ailleurs s'échapper elle-même, au pôle positif, d'une *lèvre d'un blanc rosé* très-éclatant qui termine le rhéophore positif.

» 3°. Qu'il semblerait résulter de ce phénomène et de la mobilité des lumières rouge et bleue, sous l'influence d'une insufflation énergique, que les belles lueurs électriques, qui sont si développées dans le vide, ne constitueraient pas, à proprement parler, l'étincelle électrique, mais plutôt un milieu électrisé de proche en proche par influence, et rendu lumineux par l'effet de cette électrisation. Dans cette hypothèse, la solution de continuité entre les deux lumières rouge et bleue s'expliquerait par l'électrisation en sens contraire de l'espace privé de lumière. Peut-être, en étendant ce raisonnement, pourrait-on rendre compte d'une manière assez simple du phénomène des stratifications de la lumière dans le vide.

» 4°. Que les spectres de l'étincelle d'induction dans les milieux aériformes varient, quant aux raies qu'ils présentent, non-seulement suivant la nature des métaux qui servent de rhéophores, ainsi que l'ont constaté MM. Masson et Wheatstone, mais encore suivant les pôles du circuit, la densité du milieu aériforme et la nature de l'étincelle.

» 5°. Que le spectre de la lumière rouge non stratifiée dans le vide présente au pôle positif une série d'*ombres* très-prononcées, dégradées d'un côté, qui coupent transversalement les couleurs du spectre et qui déterminent des raies lumineuses (au nombre de six ou sept dans le vert, et autant dans le bleu et le violet) dont la largeur et l'éclat diminuent à mesure qu'elles se rapprochent des limites de ces couleurs. Quant au rouge du spectre, qui est très-éclatant, il est brusquement séparé de l'orangé par une ombre (brun-rouge), dont la dégradation est du côté opposé à celle des ombres de la couleur verte, c'est-à-dire du côté du rouge. Une pareille ombre, mais moins intense, se remarque également à la limite de l'orangé et du jaune.

» 6°. Que le spectre de la lumière bleue dans le vide au pôle négatif n'est qu'un diminutif du spectre précédent. Les parties rouge-orangé, jaunes et vertes sont à peu près les mêmes, sauf qu'elles ont beaucoup moins d'éclat, mais les parties bleues et violettes ne sont représentées que par deux raies, couleur gris-lavande et gris-violâtre, séparées l'une de l'autre et du vert par des ombres très-larges.

» 7°. Que les spectres de la lumière rose stratifiée diffèrent un peu des spectres précédents. Les raies lumineuses sont plus fines, plus déliées dans les parties bleues et violettes du spectre. Les couleurs sont moins brillantes et les ombres noires dans le vert sont plus effacées. En revanche une raie verte très-brillante et très-fine se fait remarquer près de la limite du vert et du bleu et se retrouve presque aussi brillante dans le spectre de la lumière bleue du pôle négatif, qui d'ailleurs est le même que celui de la lumière non stratifiée.

» 8° Qu'avec une lumière stratifiée blanche, telle qu'on l'obtient dans certains tubes de Gaisseler dont le vide est fait sur de l'hydrogène, le spectre au pôle positif se rapproche de celui de l'étincelle à l'air libre échangée entre des rhéophores métalliques. Cette fois les couleurs s'étalent d'une manière continue et on ne remarque d'ombres prononcées que dans le rouge. Cette ombre détache sur cette couleur une raie brillante très-vive, et va en mourant jusqu'à l'orangé. Le jaune est très-peu apparent; il est remplacé par une teinte composée d'orangé, de jaune et de vert. Le vert avec lequel se mélange cette teinte est traversé par trois raies claires et minces dont l'une est jaune vert, la seconde d'un vert émeraude et la troisième d'un vert bleu très-éclatant. Cette dernière est la plus large et la plus apparente. Dans le bleu on distingue une raie bleu-clair nettement arrêtée, puis une bande plus

large de bleu-indigo sans contours bien définis. Au pôle négatif la lumière, qui est d'un bleu très-pâle, présente un spectre analogue à celui du même pôle avec les lumières précédentes. »

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Recherches sur le magnétisme terrestre.* (Deuxième partie); *par* **M. Pariset.**

(Commissaires précédemment nommés : MM. Pouillet, Babinet, Duperrey.)

« Ce travail, dit l'auteur, est la seconde partie d'un Mémoire que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences, en 1858. Dans la première partie, j'ai cherché le moyen de déterminer les valeurs successives de la déclinaison, par le moyen mouvement du pôle magnétique sur la surface du globe. Dans cette seconde partie, j'essaye d'expliquer les phénomènes de l'inclinaison, d'après les formules d'Ampère, en supposant, avec l'illustre auteur de l'électro-dynamique, que ces phénomènes sont dus aux actions des courants électriques circulant dans l'équateur magnétique, près de la surface terrestre.

» Cette question, qui offre un si grand intérêt, n'avait pas, je crois, encore été traitée par le calcul, à cause des énormes difficultés qu'offrent les intégrales, qui expriment l'action d'un courant circulaire d'un tres-grand rayon, sur un solénoïde défini dont la position est donnée. On s'était borné à étudier ce qui doit avoir lieu lorsque le rayon du courant est très-petit, auquel cas le calcul se simplifie considérablement, à raison des termes que l'on peut négliger. C'est ainsi que Savary est parvenu à démontrer la formule

$$\operatorname{tang} i = 2 \operatorname{tang} \lambda,$$

qui sert à déterminer l'inclinaison, au moyen de la latitude magnétique, formule que M. Biot avait fait connaître depuis longtemps.

» En étudiant les belles théories dues à l'illustre Ampère, il m'est venu à la pensée que l'on pourrait peut-être éviter les obstacles infranchissables que présentent les intégrales lorsqu'on veut traiter la question sous le point de vue général, c'est-à-dire dans l'hypothèse où le rayon du circuit est très-grand, et tourner en quelque sorte la difficulté, en développant tout simplement en série les expressions différentielles à intégrer.

» En essayant de résoudre la question de cette manière, je me suis bientôt aperçu que l'on peut, en effet, arriver à des résultats dignes d'être pris en considération, et que les calculs à exécuter sont même beaucoup

moins longs que je ne me l'étais imaginé, parce que, dans l'intégration, la plupart des termes des développements s'évanouissent aux limites. C'est ainsi que j'ai été conduit, par une marche en apparence très-compliquée, et pourtant fort simple, aux valeurs approchées des deux intégrales dont dépend la solution du problème.

» Les séries que l'on obtient de cette manière et qui renferment les puissances du cosinus de la latitude magnétique, ne sont malheureusement pas toutes deux convergentes. Dans l'une, les coefficients de ces puissances vont en augmentant d'un terme au suivant, tandis que dans l'autre les coefficients vont, au contraire, en diminuant. Cependant les variations qu'éprouvent les coefficients de la première sont assez faibles pour que la série soit rendue convergente par certaines valeurs du cosinus de la latitude magnétique; mais elle cesse de le devenir à une certaine limite.

» Dans les applications que j'ai faites de ces formules, j'ai cherché d'abord les inclinaisons; de 5 en 5 degrés, depuis 85 jusqu'à 30 degrés inclusivement, limite à laquelle l'une des séries cesse de devenir assez convergente pour qu'on puisse compter sur une exactitude suffisante; puis j'ai cherché l'inclinaison en quelques lieux de la surface du globe, à des époques données.

» Le problème que je m'étais proposé n'est donc résolu qu'imparfaitement, puisqu'il n'est pas possible de calculer, au moyen de ces formules, les inclinaisons des points dont les latitudes magnétiques sont au-dessous de 30 degrés. Je me suis néanmoins déterminé à faire connaître ce petit travail, par la pensée que, tout incomplet qu'il soit, il contribuera peut-être à jeter quelque lumière sur l'une des questions les plus intéressantes de la physique du globe. »

PHYSIOLOGIE. — *Sur le rôle du pancréas dans la digestion* (addition au travail présenté en avril 1857 à l'Académie); *par* **M. L. Corvisart.** (Extrait par l'auteur.)

(Commission du prix de Physiologie expérimentale.)

« Les résultats qui se déduisent de mon travail peuvent être résumés dans les propositions suivantes :

» 1°. Les aliments azotés subissent de la part du pancréas une dissolution et une transformation digestives.

» 2°. Le suc pancréatique exerce cette action indépendamment de la

réaction alcaline acide ou neutre (indépendance bien exceptionnelle parmi les ferments digestifs).

» 3°. Les aliments crus sont violemment digérés par le pancréas, même s'ils n'ont point été touchés par le suc gastrique.

» 4°. C'est en peptone ou albuminose que les aliments albuminoïdes sont transformés par le pancréas, qui n'altère point les peptones formées par l'estomac.

» 5°. L'action digestive du pancréas sur les corps azotés est une action propre, primitive, qui réside dans le suc pancréatique avant toute immixtion avec le suc intestinal, biliaire, gastrique.

» 6°. Ce dernier au contraire à un effet *direct* nuisible sur le suc pancréatique (la peptine, la pancréatine se détruisent en se digérant l'une l'autre). Mais physiologiquement ce conflit est évité par le pylore qui sépare les deux ferments, la digestion gastrique par laquelle la peptine en formant la peptone s'épuise et s'abolit, et la bile qui détruit tout pouvoir dans le sac gastrique.

» 7°. Le suc gastrique, s'il a digéré des aliments albuminoïdes dans l'estomac et a été absorbé avec les peptones, favorise tellement l'action pancréatique par un effet *direct*, qu'à la cinquième heure de la digestion gastrique le pancréas a le maximum de puissance ; en un mot, il faut que le pancréas vienne d'être nourri immédiatement de peptones gastriques pour qu'il acquière son maximum d'action, si mes expériences sont vraies.

» 8°. Au contraire, en l'absence de digestion gastrique le pancréas est au minimum d'action, n'étant pas vigoureusement nourri par les peptones gastriques. C'est ainsi que les deux digestions, qui doivent être successives, sont enchaînées.

» 9°. Ces vues expérimentales portent une grande précision dans la marche à suivre pour l'étude si obscure des dyspepsies.

» 10°. L'estomac est fait pour recevoir des corps étrangers, le canal pancréatique est disposé pour ne point les recevoir : aussi les canules gastriques ne portent-elles aucune atteinte à la sécrétion de l'estomac ; au contraire, les fistules pancréatiques amènent promptement une profonde altération dans le suc du pancréas.

» 11°. Il est de fait que pour avoir le suc pancréatique le plus normal possible, il faut prendre celui qui a été formé dans la glande avant l'opération, c'est-à-dire celui qui s'écoule immédiatement après cette opération. C'est dans cette condition remplie que réside la supériorité du procédé par infusion d'un pancréas pris à un animal qui vient d'être tué à l'instant

même, car si elle est faite quelques secondes après le sacrifice de l'animal, l'infusion y saisit le suc normal sécrété pendant la vie et non encore écoulé.

» 12°. Mais il ne suffit point de prendre un organe sécréteur aussitôt après la mort pour y saisir sa sécrétion, il faut saisir la glande au moment de toute son activité sécrétoire. C'est la cinquième heure d'un repas mixte abondant chez un chien vivant et non pourvu de fistule pancréatique. »

MÉTÉOROLOGIE. — *Loi de la coloration et décoloration du limbe du soleil et des planètes dans leurs ascensions et déclinaisons de l'horizon au zénith et vice versâ; par* **M. Poey.**

(Commissaires précédemment nommés : MM. Faye, Delaunay.)

CORRESPONDANCE.

« **M. Bertrand** dépose sur le bureau de l'Académie plusieurs manuscrits autographes de mademoiselle Sophie Germain que la famille de cette célèbre mathématicienne à remis récemment à M. Geoffroy-Saint-Hilaire, pour en faire hommage à la bibliothèque de l'Institut.

» On sait que mademoiselle Germain a mérité en 1816 le grand prix des Sciences mathématiques. Outre le travail couronné par l'Académie et dans lequel elle montrait une connaissance approfondie des théories les plus difficiles de la science, mademoiselle Germain a composé plusieurs autres Mémoires justement estimés des géomètres et qui seraient encore consultés aujourd'hui, lors même que le sexe de leur auteur ne leur donnerait pas un intérêt tout particulier. L'un des manuscrits autographes remis par la famille de mademoiselle Germain contient de savantes notes relatives à divers passages de la théorie des fonctions de Lagrange, dont mademoiselle Germain avait fait, comme le prouve ce travail, une étude très-approfondie.

» Le don de ces manuscrits est fait par la sœur de mademoiselle Sophie Germain, madame *Dutrochet*, veuve du savant physiologiste, et par son neveu, *M. Lherbette*, ancien député. »

M. de Quatrefages adresse de Grenoble une Lettre de *M. Thannaron*, président de la Société d'Agriculture de la Drôme, et fait connaître les motifs qui en ont retardé l'envoi.

INDUSTRIE SÉRICICOLE. — *Vers à soie élevés en plein air et dans un appartement non chauffé; par* **M. Thannaron.**

« Les vers provenant de graines blanches d'Andrinople sont éclos le

27 mars dernier; ils ont été nourris avec des feuilles de mûriers nains sauvageons plantés sous une bâche.

» Conservés *sans feu* dans la maison jusqu'à la deuxième mue, les vers à cette époque ont été divisés en deux parties; l'une, placée au jardin, a été pendant quarante jours soumise à toutes les influences atmosphériques : les pluies d'orages, les tonnerres, n'ont pas paru fatiguer ces insectes; seulement ils restaient immobiles, et ne revenaient à manger que lorsque le soleil venait les réchauffer; plusieurs nuits ont été très-froides : les vers paraissaient engourdis, mais ne paraissaient pas annoncer qu'ils eussent à en souffrir : la suite d'ailleurs l'a prouvé. Depuis six jours ils ont fait leurs cocons, aucun ver n'est mort sur les branches desséchées des mûriers, qui, garnis de feuilles, leur ont été données. Il n'y en a aucun au pied de ces rameaux; comme le moment où les vers ont commencé leurs cocons n'a pas été le même pour tous, je n'ai point encore fait opérer ce petit déconnage, dans la crainte de déranger ceux qui pourraient être en retard.

» Vous vous souvenez de la visite que vous avez bien voulu faire à notre petite magnanerie; ces vers que vous trouvâtes vigoureux et à peu près exempts de taches, ont tous conservé cette belle apparence.

» Je remarque que je ne vous ai pas parlé de la portion de vers élevés à la maison : ils ont fait leurs cocons cinq jours avant ceux du jardin. Sur environ 650 cocons qui sont sur les bruyères, j'ai trouvé 42 vers *morts noirs*. Il n'y a eu que quelques petits; les cocons viennent bien tous, ainsi que vous pourrez en juger par ceux que je vous envoie (1). Il y a donc déjà une différence sensible entre ceux-ci élevés dans la maison, quoique sans feu, avec ceux du jardin, puisque ces derniers n'ont aucun ver *mort noir*. »

GÉOLOGIE ET PHYSIQUE TERRESTRE. — *Notes sur quelques observations faites dans l'Amérique septentrionale.* (Extrait d'une Lettre de M. le D[r] **Charles T. Jackson** à *M. Elie de Beaumont.*)

« Boston, le 13 juin 1859.

» On a découvert le *Paradoxides Harlani*, semblable à celui de Braintree (près Boston), à la baie de Sainte-Marie dans l'île de *Terre-Neuve*. Il s'y

---

(1) M. de Quatrefages annonce que les cocons dont il est ici question ont été remis par lui à M. Lachadenède, président du comice d'Alais, qui s'est chargé d'en surveiller le grainage et de continuer l'expérience l'année prochaine.

trouve abondamment dans un schiste calcarifère bleuâtre, qui appartient nécessairement au type silurien le plus inférieur.

» Je vous ai écrit précédemment au sujet de l'introduction à Dahlonega, en Géorgie, de la méthode hydraulique californienne pour extraire l'or du sol par le lavage. Cette méthode donnera des résultats magnifiques d'ici à un an, car l'eau et l'or sont abondants et les collines sont situées d'une manière très-favorable pour l'entraînement des matières stériles qui sont rejetées. Les roches sont décomposées, à Dahlonega, jusqu'à la profondeur de 80 ou 100 pieds anglais (25 à 30 mètres). Il ne paraît pas qu'il y ait eu aucune dénudation de roches dans les États du Sud, et particulièrement en Géorgie. L'or, dans le territoire de Dahlonega, se trouve partout dans les roches décomposées et dans le sol superficiel. Il y a aussi de riches veines d'or dans du quartz qui se montre, en petits filons minces, contemporains de la roche encaissante, dans les schistes micacés et amphiboliques.

» Je vous ai envoyé mon analyse de la *Bornite,* minéral nouvellement découvert dans la mine de Field à Dahlonega; le minerai de tellure se montre avec l'or natif dans un petit filon de quartz renfermé dans le schiste amphibolique.

» Je suis revenu depuis peu d'une excursion que j'ai faite avec M. John H. Blake, avec lequel j'étais chargé, par la Société d'Histoire naturelle de Boston, d'examiner le *Puits gelé* de Brandon (Vermont). Ce puits a 34 pieds anglais et $\frac{4}{10}$ de profondeur ($10^{m},48$) et a été creusé à travers un *gravier gelé* qui a été rencontré à la profondeur de 15 à 20 pieds au-dessous de la surface. Au moment de notre visite ce puits était incrusté de glace dans toute sa partie inférieure et ne contenait d'eau liquide que sur une hauteur de 5 pieds : cette eau gèle maintenant qnelquefois. Elle vient d'en bas, au fond du puits, dans une couche de sable qui n'est pas gelée. Le massif de calcaire gris-bleuâtre qui supporte le gravier porte les traces très-marquées des effets d'un transport violent (*drift*) et présente l'aspect des *roches moutonnées :* sur sa surface se trouvent des blocs de roches, qui n'appartiennent pas à la contrée, telles que granite, syénite et quartz....

» Nous avons l'intention de faire sur ce même sujet des recherches ultérieures et d'examiner deux autres puits gelés qu'on a dit exister l'un à Pioga, sur la rivière Susquehanna (New-York), et l'autre à Hartford (Connecticut), afin de découvrir, s'il est possible, l'origine de la glace des couches gelées. »

M. **Élie de Beaumont**, en présentant au nom de l'auteur *M. Wolf*, un

nouveau fascicule de ses publications sur les *taches solaires*, donne, d'après la Lettre d'envoi, une indication des résultats qui y sont exposés.

Cet opuscule est renvoyé, comme l'avaient été les précédents, à l'examen de MM. Laugier et Delaunay.

M. le Secrétaire perpétuel signale encore parmi les pièces imprimées de la Correspondance, et présente au nom de l'auteur, *M. E. Maury*, directeur de l'observatoire de Washington et du Bureau hydrographique, le deuxième volume des « *Explications et instructions nautiques accompagnant la Carte des vents et des courants* ».

M. Duperrey est invité à prendre connaissance de ce volume de l'ouvrage, qui est aujourd'hui à sa huitième édition, et à en faire l'objet d'un Rapport verbal.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Note sur le changement de la variable indépendante; par* M. Simon Spitzer.

« Il arrive souvent qu'il faut faire un changement de la variable indépendante. J'ai trouvé pour le cas qu'on a

$$(1)\qquad x = \frac{a + b\xi}{a_1 + b_1\xi},$$

où a, a_1, b, b_1 sont des nombres constants, les deux formules suivantes :

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{(a_1 + b_1\xi)^{n+1}}{(a_1 b - ab_1)^n}\cdot\dfrac{d^n}{d\xi^n}\left[(a_1 + b_1\xi)^{n-1} y\right], \\[2ex] \dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{(a_1 + b_1\xi)^n}{(a_1 b - ab_1)^n}\cdot\dfrac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}\left[(a_1 + b_1\xi)^n \dfrac{dy}{d\xi}\right], \end{cases}$$

dont l'exactitude se laisse prouver très-facilement par l'induction. En différentiant les deux équations par ξ, on obtient

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}\cdot\dfrac{dx}{d\xi} = \dfrac{(n+1)b_1(a_1 + b_1\xi)^n}{(a_1 b - ab_1)^n}\cdot\dfrac{d^n}{d\xi^n}\left[(a_1 + b_1\xi)^{n-1} y\right] \\[1ex] \qquad + \dfrac{(a_1 + b_1\xi)^{n+1}}{(a_1 b - ab_1)^n}\cdot\dfrac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}\left[(a_1 + b_1\xi)^{n-1} y\right], \\[2ex] \dfrac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}\cdot\dfrac{dx}{d\xi} = \dfrac{nb_1(a + b_1\xi)^{n-1}}{(a_1 b - ab_1)^n}\cdot\dfrac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}\left[(a_1 + b_1\xi)^n \dfrac{dy}{d\xi}\right] \\[1ex] \qquad + \dfrac{(a_1 + b_1\xi)^n}{(a_1 b - ab_1)^n}\cdot\dfrac{d^n}{d\xi^n}\left[(a_1 + b_1\xi)^n \dfrac{dy}{d\xi}\right]; \end{cases}$$

et quand on substitue pour $\frac{dx}{d\xi}$ la valeur, résultant de l'équation (1), que voici,

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{a_1 b - ab_1}{(a_1 + b_1 \xi)^2},$$

on obtient, en divisant les deux parties de l'équation (3) par $\frac{dx}{d\xi}$, les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} &= \frac{(n+1) b_1 (a_1 + b_1 \xi)^{n+2}}{(a_1 b - ab_1)^{n+1}} \cdot \frac{d^n}{d\xi^n}[(a_1 + b_1 \xi)^{n-1} y] \\
&\quad + \frac{(a_1 + b_1 \xi)^{n+3}}{(a_1 b - ab_1)^{n+1}} \cdot \frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}[(a_1 + b_1 \xi)^{n-1} y], \\
\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} &= \frac{n b_1 (a_1 + b_1 \xi)^{n+1}}{(a_1 b - ab_1)^{n+1}} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}\left[(a_1 + b_1 \xi)^n \frac{dy}{d\xi}\right]. \\
&\quad + \frac{(a_1 + b_1 \xi)^{n+2}}{(a_1 b - ab_1)^{n+1}} \cdot \frac{d^n}{d\xi^n}\left[(a_1 + b_1 \xi)^n \frac{dy}{d\xi}\right],
\end{aligned}$$

ou dans une forme plus simple

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} &= \frac{(a_1 + b_1 \xi)^{n+2}}{(a_1 b - ab_1)^{n+1}} \cdot \frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}[(a_1 + b_1 \xi).(a_1 + b_1 \xi)^{n-1} y], \\
\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} &= \frac{(a_1 + b_1 \xi)^{n+1}}{(a_1 b - ab_1)^{n+1}} \cdot \frac{d^n}{d\xi^n}\left[(a_1 + b_1 \xi).(a_1 + b_1 \xi)^n \frac{dy}{d\xi}\right],
\end{aligned}$$

et enfin les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} &= \frac{(a_1 + b_1 \xi)^{n+2}}{(a_1 b - ab_1)^{n+1}} \cdot \frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}[(a_1 + b_1 \xi)^n y], \\
\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} &= \frac{(a_1 + b_1 \xi)^{n+1}}{(a_1 b - ab_1)^{n+1}} \cdot \frac{d^n}{d\xi^n}\left[(a_1 + b_1 \xi)^{n+1} \frac{dy}{d\xi}\right],
\end{aligned}$$

lesquelles diffèrent des équations (2), n étant au lieu de $n+1$. Si les équations (2) sont donc identiques pour $n = 0$, elles sont aussi identiques pour chaque valeur de n entière et positive, et le premier ayant lieu, le dernier s'ensuit.

» A présent, je me propose d'intégrer l'équation

$$(a + b\xi)^p . (a_1 + b_1 \xi)^q \cdot \frac{d^n z}{d\xi^n} = z,$$

dans laquelle les nombres a, b, a_1, b_1, p, q sont constants, et n est un nombre entier et positif.

» En posant

$$z = (a_1 + b_1\xi)^{n-1} y,$$

on obtient

$$(a + b\xi)^p (a_1 + b_1\xi)^q \frac{d^n}{d\xi^n}[(a_1 + b_1\xi)^{n-1} y] = (a_1 + b_1\xi)^{n-1} y,$$

ou

$$(a + b\xi)^p (a_1 + b_1\xi)^{q-2n} (a_1 + b_1\xi)^{n+1} \frac{d^n}{d\xi^n}[(a_1 + b_1\xi)^{n-1} y] = y.$$

Posant dans cette équation pour ξ une autre variable x par la substitution

$$x = \frac{a + b}{a_1 + b_1\xi},$$

on obtient, ayant égard aux équations suivantes,

$$\xi = \frac{a_1 x - a}{b - b_1 x},$$

$$a + b\xi = \frac{(a_1 b - a b_1) x}{b - b_1 x},$$

$$a_1 + b_1\xi = \frac{a_1 b - a b_1}{b - b_1 x};$$

après une simple réduction

$$(a_1 b - a b_1)^{p+q-n} x^p \frac{d^n y}{dx^n} = (b - b_1 x)^{p+q-2n} y$$

qui se simplifie, quand il est

$$p + q = 2n,$$

car on a alors l'équation

$$(a_1 b - a b_1)^n x^p \frac{d^n y}{dx^n} = y,$$

laquelle, dans la forme suivante,

$$\xi^m \frac{d^n z}{d\xi^n} = \alpha z,$$

a été le sujet de ma Note précédente (*Compte rendu*, 23 mai 1859).

» *Exemple*. Le cas le plus simple de cette classe est celui où $p = q$ et où, par conséquent, l'équation proposée est de la forme

$$(4) \qquad (\xi^2 + \alpha\xi + \beta)^n \frac{d^n z}{d\xi^n} = \gamma z;$$

on écrit d'une autre manière,

$$(2\xi+\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta})^n(2\xi+\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta})^n\frac{d^nz}{d\xi^n}=4^n\gamma z,$$

dans laquelle α, β, γ sont des nombres constants, et $\alpha^2-4\beta \gtrless 0$. En posant

$$z=(2\xi+\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta})^{n-1}y,$$

et alors

$$x=\frac{2\xi+\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2\xi+\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta}},$$

on obtient l'équation

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{\gamma y}{(\alpha^2-4\beta)^{\frac{n}{2}}},$$

de laquelle l'intégrale complète est

$$y=C_1x^{m_1}+C_2x^{m_2}+\ldots+C_nx^{m_n}=\mathop{\mathrm{S}}_{\rho=1}^{\rho=n}[C_\rho x^{m_\rho}],$$

en désignant par $m_1, m_2, \ldots, m_n$ les racines de l'équation

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)=\frac{\gamma}{(\alpha^2-4\beta)^{\frac{n}{2}}},$$

et par $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les constantes arbitraires. Alors elle est l'intégrale complète de l'équation (4)

$$z=(2\xi+\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta})^{n-1}\mathop{\mathrm{S}}_{\rho=1}^{\rho=n}\left[C_\rho\left(\frac{2\xi+\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2\xi+\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta}}\right)^{m_\rho}\right].$$

ASTRONOMIE. — *Nouvelle méthode de micrométrie stellaire.* (Lettre de **M. A. de Gasparis** à *M. Élie de Beaumont.*)

« Pour mesurer la différence en AR de deux étoiles voisines, j'avais proposé, il y a quelque temps, un moyen qui consisterait à faire usage d'une lunette douée d'un mouvement de rotation uniforme, peu différente de celle de la sphère étoilée. Comme il semble que l'uniformité presque parfaite exigée dans ce dessein est très-difficile à obtenir en pratique, et qu'il faudrait employer pour y réussir des moteurs notablement plus grands

que les moteurs actuels, j'ai pensé qu'on échapperait à ces difficultés en douant de mouvement uniforme le petit appareil qui porte le micromètre. Le problème serait plus facile à résoudre; mais, d'un autre côté, par l'immobilité de la lunette et par le petit champ, la méthode ne pourrait être employée que sur les étoiles doubles et donner la distance même des deux composantes à l'aide des micromètres angulaires ou circulaires.

» On en pourrait aussi faire l'essai pour la mesure du diamètre d'une étoile remarquable. Le temps compris entre la disparition et l'apparition derrière le même fil du micromètre devrait être plus court que le temps donné par une petite étoile de même déclinaison (et sans diamètre sensible) d'une quantité égale au diamètre de l'étoile. En supposant que la vitesse de rotation de l'appareil qui porte le micromètre fût telle, qu'il décrivît autour de l'axe du monde une circonférence en vingt-quatre heures, temps moyen, le diamètre d'une étoile d'un dixième de seconde en arc serait donné par un temps observé plus court de 2,4 secondes en temps.

» Je ne me fais pas illusion sur les nombreuses difficultés attachées à ce genre de recherches. On devra connaître dans chaque observation le rapport de vitesse entre le micromètre et la sphère étoilée; l'appareil doit être tel, que son mouvement puisse être modifié par les différentes déclinaisons; on devra faire usage de lunettes assez parfaites pour ne pas donner de rayons sur les étoiles, etc. *Usus plura docebit*, si toutefois on croit qu'on puisse faire usage de ce moyen avec quelque chance de succès. »

CHIMIE PHYSIOLOGIQUE. — *Présence de l'urée dans le chyle et dans la lymphe; par* **M. Ad. Wurtz.**

« On voyait à Alfort, il y a deux ans, un taureau carnivore auquel on avait pratiqué une fistule du canal thoracique. J'ai eu l'idée de rechercher l'urée dans le chyle de ce taureau. J'étais guidé par la pensée que l'urée devait prendre naissance, non pas dans le système capillaire sanguin, comme on l'a prétendu quelquefois, mais dans l'intimité de tous les tissus, partout où des matériaux devenus impropres à la vie ont besoin d'être emportés par la combustion respiratoire. S'il en est ainsi, il m'a semblé qu'on devait retrouver l'urée, non-seulement dans le sang, où sa présence est constatée depuis longtemps, mais encore dans la lymphe et par conséquent dans le chyle du canal thoracique. Il paraît naturel, en effet, que les lymphatiques contribuent pour leur part à l'absorption des matériaux provenant des métamorphoses des tissus dans lesquels plongent les radicules de ces vaisseaux.

» Le chyle du taureau dont il s'agit s'est montré très-riche en urée. J'ai coagulé à chaud environ 600 grammes de ce chyle, j'ai évaporé la liqueur filtrée, j'ai repris par l'alcool absolu, j'ai évaporé et j'ai épuisé l'extrait alcoolique par l'éther. Celui-ci a abandonné des cristaux parfaitement incolores d'urée, qui a été convertie partiellement en nitrate.

» Ce résultat m'a engagé à étendre mes recherches à la lymphe elle-même. Ayant pu me procurer, par les soins obligeants de M. Colin, de la lymphe de chien, de vache, de taureau, de cheval, j'y ai constaté la présence de l'urée. Il m'a paru intéressant de comparer les quantités d'urée que renferment le sang, le chyle et la lymphe d'un même animal. Pour cela il a fallu entreprendre quelques recherches quantitatives qui ont été exécutées à l'aide d'un procédé qu'il serait trop long d'exposer ici. En somme, ce procédé est fondé sur la combinaison des méthodes que MM. Liebig et Bunsen ont proposées pour le dosage de l'urée.

» Je réunis dans le tableau suivant les résultats numériques de mes recherches.

NOM DE L'ANIMAL.	RÉGIME.	QUANTITÉS D'URÉE CONTENUES DANS 1000 GR.		
		Sang.	Chyle.	Lymphe.
Chien.	Nourri de viande.	0,089	»	0,158
Id.	Id.	»	0,183	»
Vache.	Luzerne sèche.	0,192	0,192	0,193
Taureau.	Luzerne et tourteaux de colza.	»	0,189	0,213
Autre taureau. . .	Tourteaux, avant la rumin.	»	»	0,215
Bélier.	Régime ordin., rumin. suspend.	(artériel) 0,248	0,280	»
Mouton.	»	»	0,071	»
Cheval.	»	»	»	0,126 / 0,112

» Je dois ajouter qu'ayant eu occasion d'analyser une certaine quantité de chyle proprement dit, recueilli sur le trajet des chylifères mésentériques et après les ganglions, j'y ai constaté également la présence d'une petite quantité d'urée.

» Celle-ci provient sans doute des mutations de tissus qui s'accomplissent dans les parois de l'intestin lui-même. »

ÉLECTROCHIMIE. — *Note sur l'amalgamation et la dorure de l'aluminium; par* **M. Charles Tissier.**

« Par une Note adressée à l'Académie le 15 juin 1857, M. Cailletet annonçait qu'il était parvenu à amalgamer l'aluminium soit en le mettant en communication avec le pôle électronégatif de la pile et le faisant plonger dans du mercure mouillé d'eau acidulée ou de nitrate de mercure, soit en ayant recours à l'amalgame du sodium humecté d'eau (1).

» J'ai répété une partie de ces expériences et j'ai pu m'assurer de l'intensité avec laquelle se fait l'amalgamation au pôle négatif de la pile. En effet, si la feuille métallique n'est pas trop épaisse, elle peut être amalgamée complétement et le métal devient alors extrêmement cassant.

» De mon côté, j'ai réussi à obtenir l'union du mercure et de l'aluminium, en ayant recours simplement à une solution de soude ou de potasse caustique, sans l'emploi de la pile. L'aluminium décapé et humecté d'une dissolution alcaline se laisse mouiller immédiatement par le mercure, qui forme alors un *étamage* brillant à sa surface.

» Quel que soit le procédé employé, les propriétés de l'amalgame d'aluminium sont extrêmement remarquables. Sous l'influence du mercure auquel il est allié, l'aluminium cesse d'être un métal précieux et prend les propriétés d'un métal alcalino-terreux. Exposé à l'air, l'amalgame perd instantanément son éclat, s'échauffe et s'oxyde rapidement en se transformant en alumine et mercure métallique. L'eau le décompose avec dégagement d'hydrogène, formation d'alumine et dépôt de mercure. L'acide nitrique l'attaque avec violence.

» La facilité avec laquelle on peut amalgamer l'aluminium m'avait engagé à employer ce moyen pour le dorer et l'argenter; mais son altération presque instantanée à l'air m'a forcé d'y renoncer.

» Pour dorer l'aluminium on dissout 8 grammes d'or dans l'eau régale, on étend d'eau la solution et on la met digérer jusqu'au lendemain avec un petit excès de chaux. Le précipité d'aurate de chaux et de chaux en excès

(1) M. Cailletet attribue à l'hydrogène naissant le pouvoir de faciliter l'union de ces deux métaux. Ne serait-ce pas plutôt l'état électrique que prend l'aluminium dans ces conditions qui favoriserait l'amalgamation?

bien lavé est traité à une douce chaleur par une dissolution de 20 grammes d'hyposulfite de soude dans un litre d'eau. La liqueur filtrée est propre à dorer à froid, sans le secours de la pile, l'aluminium que l'on y plonge après l'avoir préalablement *décapé* par l'action successive de la potasse, de l'acide nitrique et de l'eau pure. »

M. Moret annonce qu'il poursuit des recherches sur l'arithmétique de Fermat et que, d'après les résultats qu'il a obtenus, résultats dont il a déjà communiqué les premiers à l'Académie, il croit avoir retrouvé la méthode du célèbre géomètre : aujourd'hui, pour prendre date, il adresse une Note ayant pour titre : « Recherches sur l'arithmétique de Diophante et de Fermat ».

Cette Note est renvoyée à l'examen de M. Hermite, déjà désigné pour la première communication que l'auteur avait adressée sous le titre de « Solution nouvelle d'un problème de Fermat ».

M. Kessler adresse un supplément à sa Note sur l'utilisation des résidus de sulfate de zinc des piles et indique ce que ses recherches ont ajouté à celles de *M. Karsten*, qui d'ailleurs ne lui étaient pas connues quand il a présenté son premier travail.

(Renvoi à l'examen des Commissaires désignés dans la précédente séance : MM. Pelouze et Balard.)

M. Cany prie l'Académie de vouloir bien faire examiner un Mémoire imprimé, dont il lui adresse un exemplaire et qui a pour titre : « Organisation des concours agricoles cantonaux pour la création d'une ferme-modèle économique dans chaque canton rural ».

Une décision déjà ancienne de l'Académie relative aux ouvrages écrits en français et publiés en France ne permet pas d'accéder au désir exprimé par l'auteur. L'opuscule cependant sera renvoyé, à titre de renseignements, à la section d'Économie rurale.

La séance est levée à 4 heures et demie. E. D. B.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

L'Académie a reçu dans la séance du 4 juillet 1859 les ouvrages dont voici les titres :

Mémoires de la Société impériale d'Agriculture, Sciences et Arts d'Angers, nouvelle période ; t. II, 1er cahier ; in-8°.

Sur une fonction peu connue du pancréas, la digestion des aliments azotés ; par M. Lucien CORVISART ; br. in-8°. (Adressé pour le concours du prix de Physiologie expérimentale.)

Organisation des concours agricoles cantonaux pour la création d'une ferme-modèle économique dans chaque canton rural des départements de la France ; par M. CANY. Toulouse, 1859 ; br. in-8°.

Société de prévoyance des pharmaciens du département de la Seine. — Assemblée générale tenue à l'Ecole de Pharmacie le 27 *mars* 1859, *présidence de* M. BEGUIN. Paris, 1859 ; br. in-8°.

Explanations.... *Explications et directions nautiques accompagnant la carte des vents et des courants de* M. MAURY. Washington, 1859 ; 1 vol. in-4°.

Mittheilungen.... *Communication sur les taches du soleil ; par* M. R. WOLFF ; 9e numéro, in-8°.